

CULEGERI
DE
PROBLEME
DE
MATEMATICĂ
SI
FIZICĂ

SERIE

V. CHIRIAC ● M. CHIRIAC

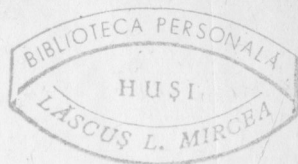
PROBLEME DE ALGEBRĂ



VASILE CHIRIAC



MIHAI CHIRIAC



PROBLEME DE ALGEBRĂ



EDITURA TEHNICĂ

BUCUREȘTI — 1977

Lucrarea cuprinde un număr mare de probleme de algebră rezolvate prin diverse metode cu grade de dificultate diferite sau cu indicații de rezolvare.

Cuprinde capitolele: Mulțimi; Relații; Aplicații; Numere reale; Ecuatii de gradul întâi și al doilea și reductibile la acestea; Inecuații; Ecuatii și sisteme de ecuații exponențiale și logaritmice; Numere complexe; Analiză combinatorică; Progresii; Sume; Matrice; Determinanți; Sisteme de ecuații liniare; Polinoame; Frații algebrice; Ecuatii de grad superior lui 2; Structuri algebrice; Probleme recapitulative.

Se adresează tuturor celor ce-și însușesc matematicile moderne la nivel mediu, elevilor, profesorilor de liceu, subinginerilor, tehnicienilor etc.

PREFAȚĂ

Culegerea de față cuprinde exerciții și probleme de algebră din materia prevăzută în programele de studiu la nivel mediu, în liceele teoretice și industriale pentru muncitorii de înaltă calificare, și a examenelor de admitere în învățământul superior. Multe probleme clasice sînt puse dintr-un punct de vedere nou, în care intervin noțiuni ca valoare absolută, parte întreagă, rezolvări într-un anumit inel sau corp, rar întâlnite pînă în prezent în culegerile apărute. Un număr de aplicații variate, cu diferite grade de dificultate, sînt compuse de autori, altele sînt prelucrări după problemele din lucrările indicate în bibliografie.

Exercițiile și problemele sînt grupate în 13 capitole; primele 12 capitole conțin probleme rezolvate și probleme propuse, iar ultimul capitol conține probleme recapitulative și de sinteză.

Soluțiile problemelor rezolvate sînt ușor de urmărit și au ca scop aprofundarea noțiunilor teoretice de algebră și constituie un îndreptar pentru rezolvarea problemelor propuse. În unele cazuri s-au dat mai multe metode de rezolvare pentru a obișnui pe cititor să privească problema din mai multe puncte de vedere.

În partea a doua a lucrării s-au dat indicații și răspunsuri la problemele propuse. În legătură cu aceasta facem precizarea că un studiu personal, atent, al problemei poate duce de multe ori la găsirea soluției printr-o metodă diferită de cea indicată. În acest fel cititorul își poate încerca contribuția personală pentru rezolvarea problemelor propuse.

În încheiere mulțumim tov. prof. M. Roșculeț și tov. acad. N. Teodorescu pentru prețioasele indicații date cu ocazia efectuării controlului științific al lucrării.

AUTORII

Capitolul I

MULȚIMI. RELAȚII. APLICAȚII

PROBLEME REZOLVATE

I. 1. Se dă mulțimea $A = \left\{ x \mid x = \frac{2n^2 - 9n + 7}{n - 5}, n \in \mathbb{N} \setminus \{5\} \right\}$. Să se determine toate elementele $x \in A$ pentru care x este divizibil prin 3.

Rezolvare. Se determină mai întâi elementele $x \in A$ pentru care x este întreg: $x = 2n + 1 + \frac{12}{n - 5} \in \mathbb{Z}$, dacă $n - 5$ este un divizor al lui 12, adică $n - 5 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$, se obține

$$\left\{ x \in A \mid x = 2n + 1 + \frac{12}{n - 5} \in \mathbb{Z}, n = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 17 \right\} = \{-3, 0, 1, 21, 22, 25, 36\}.$$

Mulțimea elementelor $x \in A$, pentru care x este divizibil prin 3 este

$$M = \{x \in A \mid x \equiv 0 \pmod{3}\} = \{-3, 0, 21, 36\}.$$

I. 2. Pentru orice număr real x se consideră numărul

$$E(x) = \sqrt{18 + 3x - 8\sqrt{3x + 2}} + \sqrt{11 + 3x - 6\sqrt{3x + 2}}.$$

a) Să se determine mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid E(x) \in \mathbb{R}\}$.

b) Să se arate că există un interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ în care $E(x)$ este constant.

$$\begin{aligned} \text{Rezolvare. a) } E(x) &= \sqrt{(4 - \sqrt{3x + 2})^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{3x + 2})^2} = \\ &= |4 - \sqrt{3x + 2}| + |3 - \sqrt{3x + 2}|, \end{aligned}$$

$$E(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow 3x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \in \left[-\frac{2}{3}, +\infty\right), \text{ adică } A = \left[-\frac{2}{3}, +\infty\right).$$

b) Folosind definiția valorii absolute a numerelor reale se obține:

$$E(x) = \begin{cases} 7 - 2\sqrt{3x+2} & \text{pentru } x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right], \\ 1 & \text{pentru } x \in \left[\frac{7}{3}, \frac{14}{3}\right], \\ -7 + 2\sqrt{3x+2} & \text{pentru } x \in \left(\frac{14}{3}, +\infty\right) \end{cases}$$

Se observă că $E(x) = 1$ pentru orice $x \in \left[\frac{7}{3}, \frac{14}{3}\right]$.

I.3. Să se determine mulțimea punctelor din plan, de coordonate (α, β) pentru care ecuația

$||x+a| - |x-a|| = \alpha|x| + \beta, a > 0, a, x, \alpha, \beta \in \mathbb{R},$
admite patru soluții.

Rezolvare.

$$f(x) = ||x+a| - |x-a|| = \begin{cases} 2|x| & \text{pentru } x \in (-a, a), \\ 2a & \text{pentru } x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty). \end{cases}$$

a) $x \in (-\infty, -a]$:

$$2a = -\alpha x + \beta \Rightarrow x_1 = \frac{\beta - 2a}{\alpha} \text{ cu } x_1 < -a, \text{ adică}$$

$$\frac{\beta - 2a}{\alpha} < -a, \text{ cu } \alpha \neq 0. \quad (1)$$

b) $x \in (-a, 0]$:

$$-2x = -\alpha x + \beta \Rightarrow x_2 = \frac{\beta}{\alpha - 2} \text{ cu } -a < x_2 < 0, \text{ adică}$$

$$-a < \frac{\beta}{\alpha - 2} < 0 \text{ cu } \alpha \neq 2. \quad (2)$$

c) $x \in (0, a]$:

$$2x = \alpha x + \beta \Rightarrow x_3 = -\frac{\beta}{\alpha - 2} \text{ cu } 0 < x_3 < a, \text{ adică}$$

$$0 < -\frac{\beta}{\alpha - 2} < a \text{ cu } \alpha \neq 2.$$

d) $x \in [a, +\infty)$:

$$2a = \alpha x + \beta \Rightarrow x_4 = \frac{2a - \beta}{\alpha} \text{ cu } a < x_4, \text{ adică}$$

$$a < \frac{2a - \beta}{\alpha} \text{ cu } \alpha \neq 0.$$

Ecuația admite patru soluții în $\mathbb{R}$ dacă α, β satisfac relațiile (1) – (4) care se reduc la următoarele:

$$\begin{cases} \frac{\beta - 2a}{\alpha} < -a \\ -a < \frac{\beta}{\alpha - 2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha x + \beta - 2a}{\alpha} < 0 \\ \frac{\alpha x + \beta - 2a}{\alpha - 2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha x + \beta - 2a}{\alpha} < 0 \\ \frac{\alpha - 2}{\alpha} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha x + \beta - 2a}{\alpha} < 0 \\ \frac{\beta}{\alpha - 2} < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha x + \beta - 2a}{\alpha} < 0 \\ \alpha \in (0, 2) \\ \beta \in (0, +\infty) \end{cases} \Rightarrow \alpha \in \left(0, \frac{2a - \beta}{a}\right), \beta \in (0, 2a),$$

adică mulțimea punctelor $M(\alpha, \beta)$ din interiorul triunghiului OAB (exclusiv laturile), fig. I. 3a).

Pentru $x = \pm a$, din ecuația dată se obține $2a = \alpha a + \beta$, și (2), (3) nu au loc, astfel că ecuația admite numai două soluții.

Pentru $\alpha = 0$ și $\beta = 2a$ ecuația este nedeterminată, $x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$.

Pentru $\alpha = 2$ și $\beta = 0$ ecuația este nedeterminată, $x \in (-a, a)$.

Interpretare geometrică. Soluțiile ecuației date sînt abscisele punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor:

$$f(x) = \begin{cases} 2|x| & \text{pentru } x \in (-a, a) \\ 2a & \text{pentru } x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty) \end{cases} \text{ și } g(x) = \alpha|x| + \beta.$$

Din fig. I. 3b se observă că ecuația admite patru soluții reale dacă și numai dacă $\beta \in (0, 2a)$ și $\alpha \in \left(0, \frac{2a - \beta}{a}\right)$ care este tocmai mulțimea punctelor din interiorul triunghiului OAB (exclusiv laturile), fig. I.3a.

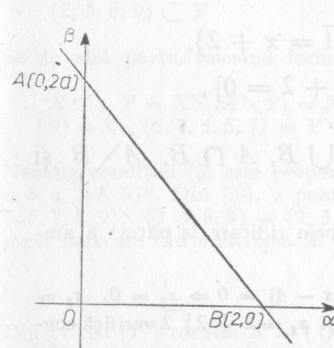


Fig. I. 3a

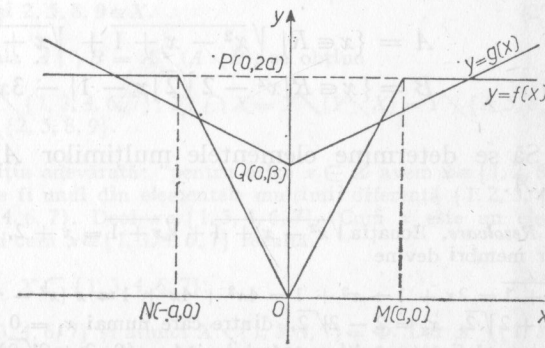


Fig. I. 3b

$$\begin{aligned} A &= \{x | (x - 2m + 1)(x - 3m + 44) = 0, m \in N\}, \\ B &= \{y | (y + 5n - 81)(y + 7n - 61) = 0, n \in N\}, \\ C &= \{z | (z + 10p - 81)(z - 15p + 44) = 0, p = 1, 2, 3, \dots, 8\}, \\ D &= \{u | (u + 14q - 61)(u + 21q - 61) = 0, q = 1, 2, 3, 4\}. \end{aligned}$$

Să se arate că $A \cap B = C \cup D$.

Rezolvare. Se scrie $A = A_1 \cup A_2$ și $B = B_1 \cup B_2$, unde

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x | x - 2m + 1 = 0, m \in N\}, A_2 = \{x | x - 3m + 44 = 0, m \in N\}, \\ B_1 &= \{y | y + 5n - 81 = 0, n \in N\}, B_2 = \{y | y + 7n - 61 = 0, n \in N\}. \end{aligned}$$

Se obține:

$$A \cap B = (A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2) = (A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_1) \cup (A_1 \cap B_2) \cup (A_2 \cap B_2). \quad (1)$$

Dar $A_1 \cap B_1$ este mulțimea elementelor $x = y$, cu x și y rădăcinile ecuațiilor $x - 2m + 1 = 0, m \in N$ și $y + 5n - 81 = 0, n \in N$.

Rezolvând aceste ecuații și punând condiția $x = y$ se obține $m = 41 - \frac{5n}{2} \in N$,

dacă $n = 2k, k = 1, 2, 3, \dots, 8$, adică $m = 41 - 5k, n = 2k, k = 1, 2, \dots, 8$.

Deci $A_1 \cap B_1 = \{x | x + 10k - 81 = 0, k = 1, 2, \dots, 8\} \cap \{y | y + 10k - 81 = 0, k = 1, 2, \dots, 8\} = \{1, 2, \dots, 8\} = \{v | v + 10k - 81 = 0, k = 1, 2, \dots, 8\}$.

Analog

$$\begin{aligned} A_2 \cap B_1 &= \{v | v - 15k + 44 = 0, k = 1, 2, \dots, 8\}, \\ A_1 \cap B_2 &= \{v | v + 14k - 61 = 0, k = 1, 2, 3, 4\}, \\ A_2 \cap B_2 &= \{v | v + 21k - 61 = 0, k = 1, 2, 3, 4\}. \end{aligned}$$

Înlocuind în (1) se obține $A \cap B = C \cup D$.

I.5. Se dau mulțimile:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in R | \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x + 1} = x + 2\}, \\ B &= \{x \in R | x^2 - 2\sqrt{2}|x - 1| - 3x + 2 = 0\}, \end{aligned}$$

Să se determine elementele mulțimilor $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ și $B \setminus A$.

Rezolvare. Ecuația $\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x + 1} = x + 2$, prin ridicare la pătrat a ambilor membri devine

$$\sqrt{x^3 + 1} = 2x + 1 \Rightarrow x^3 + 1 = 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow x(x^2 - 4x - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2 + 2\sqrt{2}, x_3 = 2 - 2\sqrt{2}, \text{ dintre care numai } x_1 = 0 \text{ și } x_2 = 2 + 2\sqrt{2} \text{ verifică ecuația care definește mulțimea } A \text{ și deci } A = \{0, 2 + 2\sqrt{2}\}.$$

Ecuația $x^2 - 2\sqrt{2}|x - 1| - 3x + 2 = 0$ se scrie:

$$x^2 + (2\sqrt{2} - 3) \cdot x - 2\sqrt{2} + 2 = 0 \text{ pentru } x \in (-\infty, 1), \quad (1)$$

$$x^2 - (2\sqrt{2} + 3) \cdot x + 2\sqrt{2} + 2 = 0 \text{ pentru } x \in (1, +\infty), \quad (2)$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \text{ pentru } x = 1. \quad (3)$$

Rezolvând aceste ecuații se obține $B = \{2 - 2\sqrt{2}, 1, 2 + 2\sqrt{2}\}$

$$A \cup B = \{2 - 2\sqrt{2}, 0, 1, 2 + 2\sqrt{2}\}, A \cap B = \{2 + 2\sqrt{2}\}, A \setminus B = \{0\}, B \setminus A = \{2 - 2\sqrt{2}, 1\}.$$

I.6. Se dau mulțimile $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ și $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Să se determine mulțimea X astfel încât

$$(A \setminus X) \cup (X \setminus A) = B. \quad (1)$$

Rezolvare. Din (1) rezultă $A \setminus X \subset B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, deci $1, 2, 3 \in X$ și ca urmare $A \setminus X = \{4, 5\}$. $[4, 5 \in X \text{ contrazice (1)}]$. Relația (1) se scrie $\{4, 5\} \cup (X \setminus A) = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ din care rezultă $6, 7, 8 \in X \setminus A$, adică $6, 7, 8 \in X$. Deci $X = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$.
Observație. Problema se mai poate rezolva folosind relația

$$(A \setminus X) \cup (X \setminus A) = A \cup X \setminus A \cap X.$$

I.7. Să se determine mulțimile X și Y știind că satisfac condițiile:

$$X \setminus Y = \{1, 3, 4, 6, 7\} \quad (1) \quad Y \setminus X = \{2, 5, 8, 9\}. \quad (2)$$

Propoziția „există $x \in X$ astfel ca $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ” este falsă. (3)

Rezolvare. Din condițiile (1) și (2) se obține respectiv:

$$\{1, 3, 4, 6, 7\} \subset X \quad \text{și} \quad 1, 3, 4, 6, 7 \notin Y, \quad (1')$$

$$\{2, 5, 8, 9\} \subset Y \quad \text{și} \quad 2, 5, 8, 9 \notin X. \quad (2')$$

pe de altă parte, folosind formula $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$, se obține

$$X \cap Y = X \setminus (X \setminus Y) = X \setminus \{1, 3, 4, 6, 7\}; Y \cap X = Y \setminus (Y \setminus X) = Y \setminus \{2, 5, 8, 9\} \Rightarrow X \setminus \{1, 3, 4, 6, 7\} = Y \setminus \{2, 5, 8, 9\}.$$

Negația condiției (3) este propoziția adevărată: „pentru orice $x \in X$ avem $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ”. Din (2'), x poate fi unul din elementele mulțimii diferență $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \setminus \{2, 5, 8, 9\} = \{1, 3, 4, 6, 7\}$. Deci $x \in \{1, 3, 4, 6, 7\}$. Cum x este un element oarecare din mulțimea X și cum $x \in \{1, 3, 4, 6, 7\}$ rezultă

$$X \subset \{1, 3, 4, 6, 7\}. \quad (1'')$$

Din (1') și (1'') rezultă $X = \{1, 3, 4, 6, 7\}$ și atunci $X \setminus \{1, 3, 4, 6, 7\} = \emptyset$. Dar $X \setminus \{1, 3, 4, 6, 7\} = Y \setminus \{2, 5, 8, 9\}$ și deci $Y \setminus \{2, 5, 8, 9\} = \emptyset$, adică $Y = \{2, 5, 8, 9\}$.

I.8. Să se determine mulțimile E, A, B știind că:

$$\mathbf{C}_E A = \{a, c, d, e, f, g\}, \quad (1) \quad \mathbf{C}_E B = \{a, b, f, g\}, \quad (2)$$

$$A \cup B = \{b, c, d, e\}. \quad (3)$$

Rezolvare. Metoda I. Din problemă rezultă $A \subset E, B \subset E$, astfel că din (1) se obține $E \setminus A = \{a, c, d, e, f, g\} \Rightarrow E = \{a, d, e, f, g\} \cup A$.

Analog din (2) și $B \subset E \Rightarrow E = \{a, b, f, g\} \cup B$. Dar $E \cup E = E$ și atunci

$$E = (\{a, c, d, e, f, g\} \cup A) \cup (\{a, b, f, g\} \cup B)$$

sau, folosind asociativitatea și comutativitatea reuniunii se obține

$$E = (\{a, c, d, e, f, g\} \cup \{a, b, f, g\}) \cup (A \cup B)$$

care împreună cu (3) dă $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

Pe de altă parte $E \setminus (E \setminus A) = E \cap A = A$ și $E \setminus (E \setminus B) = E \cap B = B$.

Deci

$$A = \{a, b, c, d, e, f, g\} \setminus \{a, c, d, e, f, g\} = \{b\},$$

$$B = \{a, b, c, d, e, f, g\} \setminus \{a, b, f, g\} = \{c, d, e\}.$$

Metoda 2. Folosind relația lui De Morgan

$$\mathbf{C}_E(A \cup B) = (\mathbf{C}_E A) \cap (\mathbf{C}_E B)$$

se obține

$$\mathbf{C}_E \{b, c, d, e\} = \{a, c, d, e, f, g\} \cap \{a, b, f, g\} = \{a, f, g\}.$$

Dar din (1) și (2) $\Rightarrow \{b, c, d, e\} \subset E$ și deci

$$E = \{a, f, g\} \cup \{b, c, d, e\} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

și atunci din (3) rezultă $A \subset E, B \subset E$. Din (1) și $A \subset E$ se obține

$$A = E \setminus \mathbf{C}_E A = \{b\}, \text{ iar din (2) și } B \subset E \text{ rezultă } B = E \setminus \mathbf{C}_E B = \{c, d, e\}.$$

I.9. Să se determine părțile A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) ale mulțimii $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ știind că:

$$\{5\} \cap \left(\bigcup_{i=2}^4 A_i \right) = \Phi. \quad (1)$$

$$A_1 \setminus A_2 = \{3, 4\}; \quad A_1 \setminus A_3 = \{2, 3\}; \quad A_1 \setminus A_4 = \{2, 4\}, \quad (2)$$

$$\left(\bigcap_{i=2}^4 A_i \right) \setminus A_1 = \{1\}. \quad (3)$$

Rezolvare. (1) $\Rightarrow 5 \in A_i$ ($i = 2, 3, 4$)

$$(2) \Rightarrow 3, 4 \notin A_2; \quad 2, 3 \notin A_3; \quad 2, 4 \notin A_4; \quad 2, 3, 4 \in A_1; \quad 5 \notin A_1; \quad 2 \in A_2; \quad 4 \in A_4; \quad 3 \in A_4.$$

$$(3) \Rightarrow 1 \in A_i \text{ ($i = 2, 3, 4$)}; \quad 1 \notin A_1$$

$$\text{Deci } A_1 = \{2, 3, 4\}; \quad A_2 = \{1, 2\}; \quad A_3 = \{1, 4\}; \quad A_4 = \{1, 3\}.$$

I.10. Fie R mulțimea numerelor reale și $R^2 = R \times R$. Să se arate că

$$A = \{(x, y) \in R^2 \mid x^3 + y^3 \leq 1 \leq x + y\} \subset [0, 1] \times [0, 1].$$

Rezolvare.

$$\begin{cases} x^3 + y^3 \leq 1 \\ 1 \leq x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq (x + y)^3 \\ x^3 + y^3 \leq x^3 + y^3 + 3xy(x + y) \end{cases} \Rightarrow x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Din

$$x^3 - 1 + y^3 \leq 0 \Rightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) + y^3 \leq 0$$

și deoarece $x^2 + x + 1 > 0, \forall x \in R \Rightarrow x - 1 \leq 0 \Rightarrow x \leq 1$. Analog $y \leq 1$. Rezultă că $x \in [0, 1], y \in [0, 1]$.

Se observă că există $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ astfel că $(x, y) \notin A$ [de exemplu $(0, 0)$ sau $(1, 1)$] și deci $A \subset [0, 1] \times [0, 1]$.

Dacă se reprezintă grafic (fig. I.10), A este mulțimea punctelor (x, y) aflate în regiunea hașurată cuprinsă între curbele $x^3 + y^3 = 1$ și $x + y = 1$ (inclusiv frontiera), iar produsul cartezian $[0, 1] \times [0, 1]$ este mulțimea punctelor (x, y) din interiorul pătratului $OACB$ (inclusiv laturile).

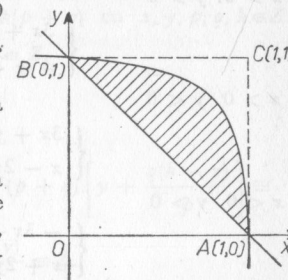


Fig. 1.10

I.11. Se consideră mulțimile de perechi de numere reale:

$$M_1 = \{(x, y) \in R \times R \mid x^3 + y^3 = 19(x + y)\},$$

$$M_2 = \{(x, y) \in R \times R \mid x^3 - y^3 = 7(x - y)\}.$$

Să se determine elementele mulțimii $M = M_1 \cap M_2$.

Rezolvare. Elementele mulțimii $M = M_1 \cap M_2$ sînt soluțiile sistemului

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 19(x + y) \\ x^3 - y^3 = 7(x - y) \end{cases}$$

echivalent cu sistemele

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad (1); \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 - xy + y^2 = 19 \end{cases} \quad (3); \quad \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases} \quad (4)$$

Se obține

$$M = \{(0, 0), (\sqrt{7}, -\sqrt{7}), (-\sqrt{7}, \sqrt{7}), (19, \sqrt{19}), (-\sqrt{19}, -\sqrt{19}), (-2, 3),$$

$$(3, -2), (-3, 2), (2, -3)\}.$$

I.12. Să se determine elementele mulțimii

$$M = \{(x, y) \in R \times R \mid 3|x| + y = 1 \text{ și } x + 2|y| = 5\}.$$

Rezolvare. Cuplurile $(x, y) \in R \times R$ satisfac sistemul

$$\begin{cases} 3|x| + y = 1, \\ x + 2|y| = 5. \end{cases}$$

Folosind definiția valorii absolute rezultă cazurile:

a) $x > 0, y > 0$

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{3}{5} \notin (0, +\infty).$$

b) $x > 0, y < 0$

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = -2.$$

c) $x < 0, y > 0$

$$\begin{cases} -3x + y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{7} \notin (-\infty, 0).$$

d) $x < 0, y < 0$

$$\begin{cases} -3x + y = 1 \\ x - 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{7}{5}, y = -\frac{16}{5}.$$

e) $x = 0$, sistemul este incompatibil,

f) $y = 0$, sistemul este incompatibil.

$$\text{Deci } M = \{(1, -2), (-\frac{7}{5}, -\frac{16}{5})\}.$$

I.13. În mulțimea Z a numerelor întregi se dă relația binară $\forall a, b \in Z, a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a^2 - b = b^2 - a$. Să se arate că relația $\mathcal{R}$ este o relație de echivalență și să se determine mulțimea claselor de echivalență.

Rezolvare. Se verifică proprietățile relației de echivalență:

1) Reflexivitatea: $a \mathcal{R} a \Rightarrow a^2 - a = a^2 - a$.

2) Simetria: $a \mathcal{R} b \Rightarrow b \mathcal{R} a$, adică $a^2 - b = b^2 - a \Rightarrow b^2 - a = a^2 - b$.

3) Tranzitivitatea: $a \mathcal{R} b, b \mathcal{R} c \Rightarrow a \mathcal{R} c$, adică $a^2 - b = b^2 - a, b^2 - c = c^2 - b \Rightarrow a^2 - c = c^2 - a$.

Pentru a afla clasele de echivalență se rezolvă ecuația $a^2 - b = b^2 - a \Leftrightarrow a^2 - b^2 + a - b = 0 \Leftrightarrow (a - b)(a + b + 1) = 0 \Leftrightarrow b = a$ și $b = -(a + 1)$. Clasa definită de numărul întreg b conține două elemente: $a, -(a + 1)$ și deci mulțimea claselor de echivalență este

$$\mathcal{C} = \{\{a, -(a + 1)\} \mid a \in Z\}.$$

I.14. Să se arate că relația binară

$$\forall x, y \in Z, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow xp + yq \equiv 0 \pmod{p + q}, (p + q) -$$

— număr prim, $p, q \in Z$, este o relație de echivalență.

Rezolvare. Se verifică proprietățile relației de echivalență:

1) Reflexivitatea: $x \mathcal{R} x \Leftrightarrow xp + xq = x \cdot (p + q) \equiv 0 \pmod{p + q}$.

2) Simetria: $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$, adică $xp + yq \equiv 0 \pmod{p + q} \Rightarrow yp + xq \equiv 0 \pmod{p + q}$.

Într-adevăr, $xp + yq \equiv 0 \pmod{p + q} \Rightarrow xp + yq = k(p + q)$ cu $x, y, p, q, k \in Z \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = \frac{k(p + q) - yq}{p} = k + \frac{q(k - y)}{p} \in Z \Rightarrow \frac{q(k - y)}{p} \in Z$.

Înlocuind $x = \frac{k(p + q) - yq}{p}$ în $yp + xq$ se obține

$$\begin{aligned} yp + \frac{kq(p + q) - yq^2}{p} &= \frac{(p + q)(kq + yp - yq)}{p} = (p + q) \left[y + \frac{q(k - y)}{p} \right] \equiv \\ &\equiv 0 \pmod{p + q} \text{ deoarece } \frac{q(k - y)}{p} \in Z. \end{aligned}$$

3) Tranzitivitatea: $x \mathcal{R} y$ și $y \mathcal{R} z$ implică $x \mathcal{R} z$, adică $xp + yq \equiv 0 \pmod{p + q}$ și $yp + zq \equiv 0 \pmod{p + q} \Rightarrow xp + zq \equiv 0 \pmod{p + q}$ ceea ce rezultă imediat prin adunarea primelor două egalități.

I.15. Se consideră aplicația $f: E \rightarrow F, (E \subset R, F \subset R), f(x) = y$, definită prin relația

$$\lambda(xy - 1) + a[xy - (x + y) + 1] = 0, \quad (1)$$

în care $a \in R$ este o constantă, iar $\lambda \in R \setminus \{-a, 0\}$ este un parametru.

a) Să se determine mulțimea E de definiție a aplicației f și mulțimea valorilor ei.

b) Să se arate că aplicația f este o bijecție.

Rezolvare. a) Din (1) se scoate y în funcție de x :

$$y = f(x) = \frac{ax + \lambda - a}{(\lambda + a)x - a} \Rightarrow E = R \setminus \left\{ \frac{a}{\lambda + a} \right\} = \left(-\infty, \frac{a}{\lambda + a} \right) \cup \left(\frac{a}{\lambda + a}, +\infty \right).$$

Fie $y \in R$; atunci $x \in R \setminus \left\{ \frac{a}{\lambda + a} \right\}$, care este dus prin aplicația f în y , este $x =$

$$= \frac{ay + \lambda - a}{(\lambda + a)y - a}, \text{ adică orice } y \in R \setminus \left\{ \frac{a}{\lambda + a} \right\} \text{ este imaginea prin aplicația } f \text{ a unui}$$

$$x \in R \setminus \left\{ \frac{a}{\lambda + a} \right\} \text{ și deci } f(E) = E, \text{ adică } f: R \setminus \left\{ \frac{a}{\lambda + a} \right\} \rightarrow R \setminus \left\{ \frac{a}{\lambda + a} \right\}, f(x) =$$

$$= \frac{ax + \lambda - a}{(\lambda + a)x - a}.$$

b) Fie $f(x_1)$ și $f(x_2)$ imaginile a două elemente $x_1, x_2 \in E$ în relația $f(x_1) = f(x_2)$.
Se obține $\frac{ax_1 + \lambda - a}{(\lambda + a)x_1 - a} = \frac{ax_2 + \lambda - a}{(\lambda + a)x_2 - a}$ sau $a(\lambda + a)x_1x_2 + (\lambda^2 - a^2)x_2 - a^2x_1 - a(\lambda - a) = a(\lambda + a)x_1x_2 + (\lambda^2 - a^2)x_1 - a^2x_2 - a(\lambda - a)$ de unde, după reducerea termenilor asemenea se obține $\lambda^2(x_2 - x_1) = 0$, deci $x_1 = x_2$, căci $\lambda \in R \setminus \{-a, 0\}$ și prin urmare f este o injecție. Dar la punctul a) s-a ajuns la rezultatul $f(E) = E$, adică f este o surjecție. Rezultă că f este o bijecție pe E .

I. 16. Fie $f: R \rightarrow F, F \subset R$, aplicația care satisface condițiile:

$$a) f(2) = 8; f(4) = 22.$$

b) $f(x - y) - f(x) = ay^2 + bxy - y, \forall x, y \in R, a, b$ fiind numere reale fixe independente de x și y .

1) Să se găsească valorile pentru a și b .

b) Să se determine aplicația f și să se arate că nu este injectivă.

Rezolvare. 1) Pentru $x = 2, y = -2$, din condițiile b) și a) se deduce

$$22 - 8 = 4a - 4b + 2 \quad (1).$$

Analog, pentru $x = 4, y = 2$, se obține $8 - 22 = 4a + 8b - 2$ (2). Din (1) și (2) se obține $a = 1, b = -2$.

2) Pentru $a = 1, b = -2$, condiția b) se scrie $f(x - y) - f(x) = y^2 - 2xy - y, \forall x, y \in R$ (3).

În (3) se introduce $x = y = 2$ și se deduce $f(0) = 2$. Apoi $y = x$ și rezultă $f(0) - f(x) = -x^2 - x$, de unde $f(x) = x^2 + x + 2$ și $f_{\min} = \frac{\Delta}{4a} = \frac{7}{4}$.

Deci: $f: R \rightarrow \left[\frac{7}{4}, +\infty\right), f(x) = x^2 + x + 2$.

Aplicația f astfel determinată nu este injectivă deoarece, $x_1 \neq x_2$, pentru care $f(x_1) = f(x_2)$; (exemplu $x_1 = 0, x_2 = -1; f(0) = f(-1) = 2$).

I. 17. Fie funcția $f: R \rightarrow R$ de variabilă x , satisfăcând condiția

$$mf(x) + nf(-x) = \begin{cases} -x - 3 & \text{pentru } x \leq 1, \\ x + 3 & \text{pentru } x > 1, \end{cases} \quad (1)$$

a) Să se determine m și n astfel încât

$$f(2) = -1 \text{ și } f(-2) = -3. \quad (2)$$

b) Să se afle funcția $f(x)$ care verifică relația

$$f(x) + 2f(-x) = \begin{cases} -x - 3 & \text{pentru } x \leq 1, \\ x + 3 & \text{pentru } x > 1. \end{cases} \quad (3)$$

c) Să se arate că funcția $f(x)$ găsită la punctul b) nu este bijectivă.

Rezolvare. a) Înlocuind (2) în (1) se obține sistemul:

$$\begin{cases} -m - 3n = 5 \\ -3m - n = -1 \end{cases} \Rightarrow m = 1, n = -2.$$

b) Pentru $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ și $x_2 = -x_1$, din (3) rezultă:

$$\begin{cases} f(x_1) + 2f(-x_1) = -x_1 - 3, \\ f(x_2) + 2f(-x_2) = -x_2 - 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_1) + 2f(-x_1) = -x_1 - 3, \\ f(-x_1) + 2f(x_1) = x_1 - 3, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_1) = x_1 - 1, f(-x_1) = -x_1 - 1.$$

Deoarece x_1 este un element oarecare din $[-1, 1]$, rezultă că pentru orice $x \in [-1, 1]$, $f(x) = x - 1$.

Pentru $x_1 \in (1, +\infty), x_2 \in (-\infty, -1)$ și $x_2 = -x_1$, din (3) se obține:

$$\begin{cases} f(x_1) + 2f(-x_1) = x_1 + 3, \\ f(x_2) + 2f(-x_2) = -x_2 - 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_1) + 2f(-x_1) = x_1 + 3, \\ f(-x_1) + 2f(x_1) = x_1 - 3, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_1) = \frac{x_1}{3} - 3, f(-x_1) = \frac{x_1}{3} + 3 \Rightarrow \forall x_1 \in (1, +\infty), f(x_1) = \frac{x_1}{3} - 3; \forall x_2 \in (-\infty, -1), f(x_2) = -\frac{x_2}{3} + 3.$$

Deci

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{3} + 3 & \text{pentru } x \in (-\infty, -1), \\ x - 1 & \text{pentru } x \in [-1, 1], \\ \frac{x}{3} - 3 & \text{pentru } x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

c) Funcția $f(x)$ găsită la punctul b) este surjectivă (oricărui $x \in R$ îi corespunde, prin f , un $y = f(x) \in R$ și reciproc) însă nu este injectivă deoarece există $x_1 \neq x_2$ pentru care $f(x_1) = f(x_2)$, ceea ce se observă ușor dacă se reprezintă grafic $f(x)$; există drepte $y = m$ care intersectează în două puncte graficul lui $f(x)$.

I.18. Se dau funcțiile:

$$f: R \setminus [0, 1) \rightarrow Q^+, f(x) = \frac{[x] + 1}{[x]},$$

$$g: R \setminus [-1, 0) \rightarrow Q^+, g(x) = \frac{[x]}{[x] + 1}$$

unde simbolul $[]$ reprezintă partea întreagă.

a) Să se studieze și să se traseze graficele acestor funcții.

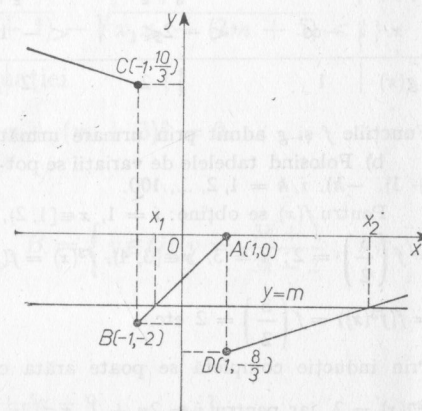


Fig. 1. 17

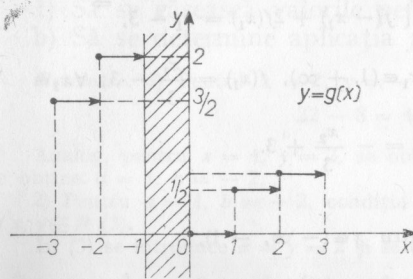
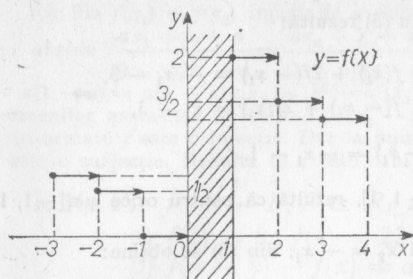


Fig. I. 18

Se pot întocmi următoarele tabele de variație ale funcțiilor f și g :

x	$-\infty$	$< -2 \leq$	$< -1 \leq$	0	$1 \leq$	$< 2 \leq$	$+\infty$
$f(x)$	1	$\frac{2}{3} \mid \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \mid 0$	0	2	$2 \mid \frac{3}{2}$	1
x	$-\infty$	$< -2 \leq$	< -1	$0 \leq$	$< 1 \leq$	$< 2 \leq$	$+\infty$
$g(x)$	1	$\frac{3}{2} \mid 2$	2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \mid \frac{3}{2}$	1

Funcțiile f și g admit prin urmare următoarele reprezentări grafice (fig. I.18.)

b) Folosind tabelele de variații se pot calcula $f^i(x)$, $x \in [i, i+1]$ și $g^k(x)$, $x \in [-(k+1), -k]$, $i, k = 1, 2, \dots, 100$.

Pentru $f(x)$ se obține: $i = 1$, $x \in [1, 2)$, $f^1(x) = 2$; $i = 2$, $x \in [2, 3)$, $f^2(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 2$; $i = 3$, $x \in [3, 4)$, $f^3(x) = f(f^2(x)) = f(2) = \frac{3}{2}$; $i = 4$, $x \in [4, 5)$, $f^4(x) = f(f^3(x)) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 2$ etc.

Prin inducție completă se poate arăta că pentru $i = 2n$, $x \in [2n, 2n+1)$ se obține $f^{2n}(x) = 2$, iar pentru $i = 2n+1$, $x \in [2n+1, 2n+2)$, $f^{2n+1}(x) = \frac{3}{2}$.

b) Dacă se notează $f^1 = f$, $f^{i+1} = f \circ f^i$ și $g^1 = g$, $g^{k+1} = g \circ g^k$ ($i, k = 1, 2, \dots$), să se calculeze

$$\sum_{i=1}^{100} f^i(x) + \sum_{k=1}^{100} g^k(x).$$

Rezolvare. a) Fie $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. După definiție rezultă $[x] = t$ pentru $x \in [t, t+1)$ și $[x] = -(t+1)$ pentru $x \in [-(t+1), -t)$, astfel că

$$f(x) = \begin{cases} \frac{t+1}{t} & \text{pentru } x \in [t, t+1) \text{ și } \forall t \in \mathbb{N}, \\ \frac{t}{t+1} & \text{pentru } x \in [-(t+1), -t) \text{ și } \forall t \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{t}{t+1} & \text{pentru } x \in [t, t+1) \text{ și } \forall t \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \frac{t+1}{t} & \text{pentru } x \in [-(t+1), -t) \text{ și } \forall t \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

În mod analog, se obține $g^1(x) = 2$, $g^2(x) = \frac{1}{2}$, $g^k(x) = 0$, pentru orice $k \geq 3$, $k \in \mathbb{N}$.

Prin urmare

$$\sum_{i=1}^{100} f^i(x) + \sum_{k=1}^{100} g^k(x) = 2 + \sum_{n=1}^{50} f^{2n}(x) + \sum_{n=1}^{49} f^{2n+1}(x) + 2 + \frac{1}{2} = 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 50 + \frac{3}{2} \cdot 49 = 178.$$

PROBLEME PROPUSE

I. 1. Să se determine elementele mulțimilor:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid x = \frac{8n-18}{2n-9}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid x = \frac{9n^2-48n+16}{3n-8}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

I. 2. Să se determine elementele mulțimii

$$M = \{x \in \mathbb{N} \mid 6x^2 - 5(k-1)x + k^2 - k - 6 = 0, k \in \mathbb{Z}\},$$

I. 3. Să se găsească elementele mulțimii:

$$M = \{m \in \mathbb{R} \mid |\sqrt{x_1 + x_2 - (m+1)} - \sqrt{x_1 x_2 - (2m+5)}| \leq 1\}$$

în care x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației

$$x^2 - m(m-1)x + (m+3)^2 = 0.$$

I. 4. Să se arate că mulțimile

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{2n+1}{2n-3}, n \in \mathbb{N} \right\}, B = \left\{ y \in \mathbb{Q} \mid y = \frac{3k+1}{3k-2}, k \in \mathbb{N} \right\}$$

sînt disjuncte.

I. 5. Se consideră mulțimea

$$M = \left\{ x \mid x = \frac{2\alpha^2 + 5\alpha + 9}{2\alpha + 3}, \alpha \in \mathbb{Q}^+ \right\}.$$

Să se determine elementele mulțimii $M \cap Z(Q^+)$ este mulțimea numerelor raționale pozitive, iar Z este mulțimea numerelor întregi).

I. 6. Se dau mulțimile:

$$A = \{x | x = 5m - 2, m \in N\}; B = \{y | y = 503 - 3n, n \in N\};$$

$$C = \{z | z = 503 - 15p, p \in N, p \leq 33\}.$$

Să se arate că $A \cap B = C$.

I. 7. Se dau mulțimile:

$$A = \{x | x - 3k - 2 = 0, k \in N\}; B = \{x | x - 4l - 503 = 0, l \in N\};$$

$$C = \{x | x - 4m - 7 = 0, m \in N\}; D = \{x | x - 3n - 503 = 0, n \in N\}.$$

Să se arate că $A \cap B = C \cap D$.

I. 8. Fie mulțimile:

$$A = \{x | (2x - m + 10)(x - 3m + 31) = 0, m \in N\}; B = \{y | y +$$

$$+ 2n - 9 = 0, n \in N\};$$

$$C = \{z | z - 2p + 5 = 0, p \in N, p \leq 6\}; D = \{u | u - 6q + 31 = 0,$$

$$q \in N, q \leq 6\},$$

Să se arate că $A \cap B = C \cup D$.

I. 9. Se consideră mulțimile:

$$A = \{x \in R | x - \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{2}\}; B = \{x \in R | 8x^2 - 8\sqrt{2}x + 3 = 0\}.$$

Să se calculeze $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.

I. 10. Să se determine mulțimile X și Y care îndeplinesc condițiile:

$$X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad (1)$$

$$(X \cap Y) \cap \{1, 2, 4, 5, 6\} = (X \cap Y) \cup \{2, 5\}, \quad (2)$$

$$\{3, 4\} \not\subset Y, \quad (3)$$

$$X \cap \{2, 5\} = \{2\}. \quad (4)$$

I. 11. Să se determine mulțimile nevide A și B , dacă:

a) mulțimea A are șase elemente, iar mulțimea B are cinci elemente;

b) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{1, 2, 8, 9, 10\}$; c) $A \setminus (A \setminus B) = \{4, 5, 6\}$;

d) $\{10\} \not\subset A$; e) $\{2\} \subset B$.

I. 12. Să se determine mulțimile X , Y , Z știind că satisfac condițiile:

$$X \cup Y \cup Z = \{1, 2, 3, 4, 5, \quad X \setminus Y = \{1, 4, 9, 11\}; \quad (5)$$

$$6, 7, 8, 9, 10, 11\}; \quad (1) \quad Y \setminus Z = \{2, 6, 7\}; \quad (6)$$

$$X \cap Y = \{2, 5, 7\}; \quad (2) \quad Z \setminus X = \{3, 8, 10\}. \quad (7)$$

$$X \cap Z = \{5, 9, 11\}; \quad (3)$$

$$Y \cap Z = \{3, 5, 8\}; \quad (4)$$

I. 13. Să se determine părțile $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$ ale mulțimii $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, știind că:

$$\bigcap_{i=1}^4 A_i = \{2\}; \quad (1)$$

$$\bigcup_{i=1}^4 A_i = T; \quad (2)$$

$$A_1 \setminus A_4 = \{1, 3\}, A_2 \setminus A_4 = \{3, 5\}, A_3 \setminus A_4 = \{5, 6\}. \quad (3)$$

I. 14. Se dă mulțimea $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Să se determine părțile $A (i = 1, 2, 3)$ ale mulțimii T astfel ca:

$$A_1 \cap A_2 = \{7\}, A_2 \cap A_3 = \{3, 5, 6\}, A_3 \cap A_1 = \{2\}, \quad (1)$$

$$A_1 \setminus A_3 = \{1, 4, 7\} \quad (2)$$

$$\bigcup_{i=1}^3 A_i = T, \quad (3)$$

I. 15. Se dau mulțimile A și $B_i (i = 1, 2, \dots, n)$ cu $B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_n$. Notînd cu $E_1 = \bigcup_{i=1}^n \overline{A} \cup B_i$ și $E_2 = \bigcap_{i=1}^n \overline{A} \cap B_i$ să se arate că $E_1 \subset E_2$. (Aici $\overline{A}$ este complementara mulțimii A față de o mulțime totală T .)

I. 16. Dacă produsul cartezian $A \times A$ are 9 elemente și dacă două dintre aceste perechi sînt (p, q) , (r, q) cu p, q, r distincte, care sînt celelalte 7 elemente?

I. 17. Fie N mulțimea numerelor naturale și P submulțimea produsului cartezian $N \times N$ formată din perechile (x, y) cu $y = x + 3$. Care dintre următoarele perechi aparțin lui P : $(1, 1)$, $(1, 4)$, $(4, 1)$, $(6, 9)$, $(11, 14)$, $(-1, 2)$, $(5, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 1)$, $(2, 5)$?

I. 18. Să se determine mulțimile A și B care satisfac condițiile:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \quad (1)$$

$$(B \setminus A) \times (A \setminus B) = \{(1, 6), (1, 8), (1, 9), (5, 6), (5, 8), (5, 9), (7, 6), (7, 8), (7, 9)\}. \quad (2)$$

I. 19. Se consideră mulțimile de perechi de numere reale:

$$M_1 = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 - y^2 = 3x - 4y\}, \quad M_2 = \{(x, y) \in R \times R \mid 2xy = 4x + 3y\}.$$

Să se determine elementele mulțimii

$$M = \{z = x^2 + y^2 \mid (x, y) \in M_1 \cap M_2\}.$$

I. 20. Se dau mulțimile:

$$A = \{(x, y) \mid x = 2k + 1, y = 2k - 1, k \in Z\};$$

$$B = \{(a, b) \mid a = 2n + 3, b = 2n + 1, n \in N\}.$$

- Să se arate că $B \subset A$.
- Să se determine mulțimea Y astfel ca $B \cup X = A$.
- Să se găsească condiția ca $A = B$.

I. 21. Să se arate că dacă $A_n \subset A_{n-1} \subset \dots \subset A_1 \subset A$, atunci

$$A \times A_1 = [A \times (A_1 \setminus A_2)] \cup [A \times (A_2 \setminus A_3)] \cup \dots \cup [A \times (A_{n-1} \setminus A_n)] \cup (A \times A_n).$$

I. 22 Fie A și B două mulțimi finite și $\overline{A}$, $\overline{B}$ cardinalele lor (cardinalul unei mulțimi finite M , notat $\overline{M}$, este numărul elementelor acestei mulțimi).

- Dacă $\overline{A \cup B} = n$, $\overline{A \cap B} = p$ și $\overline{A \setminus B} = q$, să se afle $\overline{A}$ și $\overline{B}$.
- Dacă $A \cap B = \Phi$ și $\overline{A \cup B} = 8$, $A \times B = 15$, să se afle $\overline{A}$, $\overline{B}$.

I. 23. Se dau mulțimile $A = \{x \in R \mid 2x \leq 4x - 6 \text{ și } 4x - 11 \leq 2x + 1\}$ și $B = A \cap N$. Să se determine:

- toate mulțimile X astfel ca $B \cup X = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
- toate mulțimile $Y = \{y \in Z \mid y^2 \in B \cup X\}$ astfel încât $B \cap Y = \{3\}$.

I. 24. În mulțimea $R \times R$ a punctelor din planul xOy se consideră relația $\mathcal{Q}$ definită astfel:

$$\forall (x, y), (x', y') \in R \times R, (x, y) \mathcal{Q} (x', y') \Leftrightarrow (x - x') (x + x' + a) = (y - y') (y + y' + b)$$

unde $a, b \in R$.

- Să se arate că $\mathcal{Q}$ este o relație de echivalență.
- Să se găsească clasele de echivalență mod $\mathcal{Q}$.

I. 25. Se consideră mulțimea $M = (0, 1) \cup (1, +\infty)$. În $M \times M$ se introduce relația binară $\mathcal{Q}$:

$$\forall (a, b), (c, d) \in M \times M, (a, b) \mathcal{Q} (c, d) \Leftrightarrow \log_a(c + d) = \log_c(a + b).$$

Să se arate că $\mathcal{Q}$ este o relație de echivalență.

I. 26. Să se arate că pe mulțimea $E = R \setminus \left\{2k\pi \pm \frac{\pi}{2}\right\}, k \in N$, propoziția: " $\forall a, b \in E, a \mathcal{Q} b \Leftrightarrow \sec^2 a - \tan^2 b = 1$ " definește o relație de echivalență. Să se precizeze clasele de echivalență.

I. 27. Fie $P(E)$ mulțimea părților mulțimii E .

- Dacă $E = \{a, b, c, d\}$, să se scrie elementele mulțimii $P(E)$.
- Să se demonstreze că dacă E are n elemente atunci mulțimea $P(E)$ a părților sale are 2^n elemente.
- Fie E o mulțime oarecare, finită sau infinită și $P(E)$ mulțimea părților sale. Între elementele mulțimii $P(E)$ se definește relația $\mathcal{Q}$ astfel:

$$\forall X, Y \in P(E), X \mathcal{Q} Y \Leftrightarrow \text{există o bijecție a lui } X \text{ pe } Y (X, Y \subset E)$$

Să se arate că relația $\mathcal{Q}$ este o relație de echivalență.

I. 28. Între elementele mulțimii $R^2 = R \times R$ se introduce relația $\mathcal{Q}$ definită astfel:

$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R^2, (x_1, y_1) \mathcal{Q} (x_2, y_2)$ dacă și numai dacă $x_1 \leq x_2$ și $y_1 \leq y_2$. Să se arate că relația $\mathcal{Q}$ este o relație de ordine și să se examineze dacă această ordine este totală sau parțială.

I. 29. Se dă aplicația $f: R \setminus \{0\} \rightarrow R$ definită astfel:

$$\forall x \in R - \{0\}, f(x) = x - \frac{1}{x}.$$

- Aplicația f este injectivă?
- Să se arate că aplicația f este surjectivă.

I. 30. Se dă aplicația: $f: R \setminus \{-1\} \rightarrow R \setminus \{1\}$ definită prin relația $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Să se arate că aplicația f este bijectivă și admite funcția inversă $f^{-1} = -\frac{1}{f}$.

I. 31. Fie funcția $f: R \rightarrow R$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in R$, $a \neq 0$.
a) Să se calculeze $f^2, f^3, \dots, f^n$, unde $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f^2 \circ f$, $\dots$, $f_n = f^{n-1} \circ f$.

b) Să se determine a și b astfel ca funcția $f^{-1}: R \rightarrow R$ să fie funcția inversă a lui f , definită prin $f^{-1}(x) = 2x + 3$.

I. 32. Fie funcțiile $f: R \rightarrow R$, $f(x) = x + 2$, $g: R \rightarrow R$, $g(x) = x + 3$ și $\varphi: R \rightarrow R$, $\varphi(x) = af(x) + bg(x)$. Să se determine a și b astfel încât $\varphi^{-1}(x) = f^{-1}(x) + g^{-1}(x)$.

I. 33. Se consideră mulțimile:

$$A = \{a | a = 2n + 1, n \in N\}, B = \{b | b = 3n + 1, n \in N\}.$$

a) Să se determine mulțimea $A \cap B$.

b) Să se arate că există o funcție bijectivă $f: A \rightarrow B$. Este această funcție unică?

c) Să se construiască o funcție $\varphi: A \rightarrow B$ care să fie injectivă, dar nu surjectivă.

d) Să se construiască o funcție $\psi: A \rightarrow B$ care să fie surjectivă, dar nu injectivă.

e) Dacă φ și ψ sînt funcțiile construite, să se determine mulțimile A' și B' pentru care

$$\psi^{-1}(B) \cup A' = A, \varphi(A) \cup B' = B.$$

I. 34. Se consideră mulțimea $E = \{(x, y) | x, y \in Z\} = Z \times Z$ și aplicația f definită prin

$$f: E \rightarrow E$$

$$(x, y) \rightarrow (x, xy).$$

Să se demonstreze că:

a) dacă $x \neq 0$, aplicația f este injectivă;

b) condiția necesară și suficientă pentru ca aplicația f să fie surjectivă este $x = 1$ sau $x = -1$.

Capitolul II

NUMERE REALE

PROBLEME REZOLVATE

II. 1. Să se arate că numărul $X = 44^n \cdot [2^n(44^n - 1) - 1] + 1$, $n \in N$, este divizibil prin 3741.

Rezolvare. $3741 = 43 \cdot 87$ cu 43 și 87 numere prime între ele; prin urmare dacă X este divizibil prin 43 și 87 atunci X este divizibil și prin $43 \cdot 87 = 3741$. Din $A^n - B^n = (A - B) \cdot \dots$, $\forall n \in N$, $A, B \in N$, rezultă $44^n - 1 = M43$ și $88^n - 1 = M87$, $\forall n \in N$, de unde $44^n = M43 + 1$, $88^n = M87 + 1$ și

$$X = (M43 + 1) \cdot (M43 - 1) + 1 = M43,$$

$$X = 44^n \cdot (M87 - 2^n) + 1 = M87 - 88^n + 1 = M87.$$

Deci $X = M43 \cdot M87 = M3741$.

II. 2. Să se arate că dacă n este număr natural, atunci numărul $A = 550^n - 75^n - 418^n$ este divizibil prin 57.

Rezolvare. $57 = 3 \cdot 19$ cu 3 și 19 numere prime între ele.

Numerele 550, 75 și 418 se scriu sub forme care să conțină drept factori pe 3 și pe 19: $550 = 3 \cdot 183 + 1 = 19 \cdot 29 - 1$, $75 = 3 \cdot 25 = 19 \cdot 4 - 1$, $418 = 3 \cdot 139 + 1 = 19 \cdot 22$. Prin urmare A poate fi scris sub două forme echivalente:

$$A = (3 \cdot 183 + 1)^n - (3 \cdot 25)^n - (3 \cdot 139 + 1)^n = M3 + 1 - M3 - (M3 + 1) = -M3, \forall n \in N,$$

$$A = (19 \cdot 29 - 1)^n - (19 \cdot 4 - 1)^n - (19 \cdot 22)^n = M19 + (-1)^n - [M19 + (-1)^n] - M19 = M19, \forall n \in N$$

de unde rezultă $A = M3 \cdot M19 = M57$.

II. 3. Fie A un număr natural. Se notează cu τ numărul divizorilor pozitivi și cu P produsul divizorilor pozitivi ai numărului A . Să se arate că $P^2 = A^\tau$.

Rezolvare. Conform teoremei de unicitate a descompunerii în factori primi a unui număr A , rezultă că un divizor d al acestui număr nu poate avea alți factori decât cei din A , avînd exponenții cel mult egali cu exponenții factorilor lui A . Considerînd descompunerea în factori primi $A = a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}$, $\alpha_i = 0, 1, 2, \dots$, atunci toți divizorii lui pozitivi vor fi de forma $d = a_1^{\beta_1} \cdot a_2^{\beta_2} \dots a_n^{\beta_n}$, unde $\beta_k = 0, 1, 2, \dots, 0 \leq \beta_k \leq \alpha_k$, ($k = 1, 2, \dots, n$) astfel încît pentru toate valorile posibile ale lui β_k ($k = 1, 2, \dots, n$) rezultă următorul tablou:

$$\begin{array}{ll} a_1^0, a_1^1, \dots, a_1^{\alpha_1} & (\alpha_1 + 1 \text{ divizori}) \\ a_2^0, a_2^1, \dots, a_2^{\alpha_2} & (\alpha_2 + 1 \text{ divizori}) \\ \dots & \dots \\ a_n^0, a_n^1, \dots, a_n^{\alpha_n} & (\alpha_n + 1 \text{ divizori}) \end{array}$$

Dacă se înmulțește pe rînd fiecare număr din linia întâia cu fiecare număr din linia a doua se obține $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1)$ divizori de forma $a_1^{\beta_1} \cdot a_2^{\beta_2}$. Produsul celor $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)$ divizori de forma $a_1^{\beta_1} \cdot a_2^{\beta_2}$ este

$$\prod_{\substack{0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1 \\ 0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2}} a_1^{\beta_1} \cdot a_2^{\beta_2} = (a_1^{\alpha_1+1})^1 \cdot (a_2^{\alpha_2+1})^1 = (a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2})^{\frac{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}{2}}.$$

Dacă se înmulțește fiecare din produsele $a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2}$ cu fiecare număr din linia a treia se obțin $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)$ divizori de forma $a_1^{\beta_1} \cdot a_2^{\beta_2} \cdot a_3^{\beta_3}$. Produsul celor $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)$ divizori de forma $a_1^{\beta_1} \cdot a_2^{\beta_2} \cdot a_3^{\beta_3}$ este

$$\prod_{\substack{0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1 \\ 0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2 \\ 0 \leq \beta_3 \leq \alpha_3}} a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} a_3^{\beta_3} = [a_1^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}]^1 \cdot [a_2^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}]^1 \cdot [a_3^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}]^1 = \\ = (a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3})^{\frac{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)}{2}}.$$

Procedînd la fel pînă la ultima linie se vor obține toate produsele de forma $a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} \dots a_n^{\beta_n}$, adică toți divizorii pozitivi ai numărului A ; numărul lor este $\tau = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1)$. Produsul acestor τ divizori pozitivi este

$$P = \prod_{\substack{0 \leq \beta_i \leq \alpha_i \\ (i=1,2,\dots,n)}} a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} \dots a_n^{\beta_n} = (a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n})^{\frac{\tau}{2}} = A^{\frac{\tau}{2}}$$

de unde $P^2 = A$ adică $P^2 = A^\tau$

Observație. Suma divizorilor pozitivi ai numărului A este:

$$\sigma = \sum_{\substack{0 \leq \beta_i \leq \alpha_i \\ (i=1,2,\dots,n)}} a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} \dots a_n^{\beta_n} = \sum_{0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1} a_1^{\beta_1} \cdot \sum_{0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2} a_2^{\beta_2} \dots \sum_{0 \leq \beta_n \leq \alpha_n} a_n^{\beta_n} = \\ = \frac{a_1^{\alpha_1+1} - 1}{a_1 - 1} \cdot \frac{a_2^{\alpha_2+1} - 1}{a_2 - 1} \dots \frac{a_n^{\alpha_n+1} - 1}{a_n - 1}.$$

II. 4. Să se determine numărul natural A de forma $A = 11^x \cdot 13^y \cdot 19^z$ știind că $19 \cdot A$ are cu 28 divizori pozitivi mai mulți decât A , iar $169 \cdot A$ are cu 98 divizori pozitivi mai mulți decât A .

Rezolvare. Potrivit exercițiului precedent numărul $A = 11^x \cdot 13^y \cdot 19^z$ are $\tau_1 = (x+1)(y+1)(z+1)$ divizori pozitivi, numărul $19A = 19(11^x \cdot 13^y \cdot 19^z) = 11^x \cdot 13^y \cdot 19^{z+1}$ are $\tau_2 = (x+1)(y+1)(z+2)$ divizori pozitivi și numărul $169A = 13^2(11^x \cdot 13^y \cdot 19^z) = 11^x \cdot 13^{y+2} \cdot 19^z$ are $\tau_3 = (x+1)(y+3)(z+1)$ divizori pozitivi. Avem deci egalitățile:

$$(x+1)(y+1)(z+2) = (x+1)(y+1)(z+1) + 28 \quad (1)$$

$$(x+1)(y+3)(z+1) = (x+1)(y+1)(z+1) + 98 \quad (2)$$

care se mai scriu

$$(x+1)(y+1) = 28, \quad (3)$$

$$(x+1)(z+1) = 49. \quad (4)$$

Din (3) și (4) rezultă că $x+1$ este divizor comun al numerelor 28 și 49, adică $x+1 = 7 \Rightarrow x = 6$, $y = 3$, $z = 6$ și $A = 11^6 \cdot 13^3 \cdot 19^6$.

II. 5. Să se calculeze expresia:

$$E = ([335, (6 \ 031)]_7 - [0,3(22)]_6) \cdot \sqrt{1210}_4 + [0,65(43)]_8 \cdot \sqrt{135700}_9,$$

unde indicii indică bazele sistemelor de numerație în care sînt scrise numerele respective, iar răspunsul să fie dat în baza de numerație 10.

Rezolvare. Ținînd seama de regulile de transformare a formelor zecimale periodice scrise în baza b în fracții ordinare scrise în aceeași bază, cu efectuarea calculelor în baza b , rezultă

$$\begin{aligned} [335, (6 \ 031)]_7 &= \left[335 \frac{6 \ 031}{6666} \right]_7 = \left[335 \frac{521}{606} \right]_7 = \left[335 \frac{122}{135} \right]_7 = \left[335 \frac{16}{21} \right]_7 = \\ &= \left[3 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7 + 5 + \frac{1 \cdot 7 + 6}{2 \cdot 7 + 1} \right]_{10} = 173 \frac{13}{15}; \quad [0,3(22)]_6 = \left[\frac{322 - 3}{550} \right]_6 = \\ &= \left[\frac{315}{550} \right]_6 = \left[\frac{25}{50} \right]_6 = \left[\frac{2 \cdot 6 + 5}{5 \cdot 6 + 0} \right]_{10} = \frac{17}{30}; \quad [0,65(43)]_8 = \left[\frac{6543 - 65}{7700} \right]_8 = \\ &= \left[\frac{6456}{7700} \right]_8 = \left[\frac{3227}{3740} \right]_8 = \left[\frac{361}{440} \right]_8 = \left[\frac{3 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8 + 1}{4 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 0} \right]_{10} = \frac{241}{288} \end{aligned}$$

și

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{1210_4} & 22_4 = (2 \cdot 4 + 2)_{10} = 10; \\ 10 & 102_4 \cdot 2 = 240_4; \\ -210 & \\ \hline & 210 \\ -210 & \\ \hline & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} \sqrt{135700_9} & 350_9 = (3 \cdot 9^2 + 5 \cdot 9 + 0)_{10} = 288 \\ 10 & 65_9 \cdot 5 = 357_9 \\ -357 & \\ \hline & 357 \\ -357 & \\ \hline & 00 \end{array}$$

$$\text{Deci } ([335, (6031)]_7 - [0, 3(22)]_6) \cdot \sqrt{1210_4} + [0, 65(43)]_8 \cdot \sqrt{135700_9} =$$

$$= \left(173 \frac{13}{15} - \frac{17}{30} \right) \cdot 10 + \frac{241}{288} \cdot 288 = 1733 + 241 = 1974_{10}.$$

II. 6. a) În ce bază de numerație numerele 22 și 121 sînt două puteri consecutive ale lui 4 și care sînt aceste puteri?

b) Să se determine numărul M de forma $abcba$, care să fie putere perfectă de ordinul 4 în orice bază de numerație.

Rezolvare. a) Fie x baza căutată și p o putere; se scrie $22_x = 2x + 2$ și $121_x = x^2 + 2x + 1$. Pe de altă parte, conform enunțului, trebuie să existe simultan:

$$2x + 2 = 4^p, \quad x^2 + 2x + 1 = 4^{p+1}. \quad (1)$$

Împărțind aceste relații se obține $\frac{(x+1)^2}{2(x+1)} = 4$, de unde $x = 7$. Înlocuind valoarea

lui x în prima relație (1) se găsește $16 = 4^p$, de unde $p = 2$. Deci $22_7 = 4^2$ și $121_7 = 4^3$.

b) Fie x o bază oarecare ($x > 1$). Atunci, $M_x = ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = (px + q)^4$, $p, q \in N$ sau $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = p^4x^4 + 4p^3qx^3 + 6p^2q^2x^2 + 4pq^3x + q^4$. Identificînd rezultă $a = p^4$, $b = 4p^3q$, $c = 6p^2q^2$, $b = 4pq^3$, $a = q^4$. Deoarece $a = p^4 = q^4$, rezultă că $p = q$. În continuare $b = 4p^3q = 4p^4 = 4a$, $c = 6p^2q^2 = 6p^4 = 6a$. Atunci $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = ax^4 + 4ax^3 + 6ax^2 + 4ax + a = a(x+1)^4$ și prin urmare $a = 1$, căci în caz contrar numărul nu este o putere perfectă de ordinul 4. Deci pentru $a = 1$, va rezulta $b = 4$, $c = 6$ și numărul căutat este $M = 14641$ din baza $x > 6$.

II. 7. Să se afle cea mai mare fracție astfel încît împărțind fracțiile $\frac{24}{11}$, $\frac{34}{13}$, $\frac{48}{7}$ prin această fracție se obțin cîturi întregi.

Rezolvare. Fie $\frac{q}{p}$ cea mai mare fracție ireductibilă, astfel încît $\frac{24}{11} : \frac{q}{p} = \frac{24q}{11p} = n$, $\frac{34}{13} : \frac{q}{p} = \frac{34q}{13p} = m$, $\frac{48}{7} : \frac{q}{p} = \frac{48q}{7p} = l$ cu n, m, l numere întregi. Din $(p, q) = 1$ și din condițiile $(24, 11) = 1$, $(34, 13) = 1$, $(48, 7) = 1$ rezultă că fracțiile $\frac{24q}{11p}$, $\frac{34q}{13p}$, $\frac{48q}{7p}$ vor reprezenta cele mai mici numere întregi dacă și numai dacă p este cel mai mare divizor comun al numerelor 24, 34, 48, iar q este cel mai mic multiplu comun al numerelor 11, 13, 7, adică $p = 2$ și $q = 1001$.

II. 8. Să se arate că oricare ar fi numărul întreg $n \in Z \setminus \{-1, 0, 1\}$, fracția $\frac{n^2 + 1}{n(n^2 - 1)}$ se transformă în periodică mixtă.

Rezolvare. Se scrie $\frac{n^2 + 1}{n(n^2 - 1)} = \frac{n^2 + 1}{(n - 1)n(n + 1)}$. Numitorul fiind produsul a trei numere întregi consecutive este un multiplu de 3 pe cînd numărătorul nu este un multiplu de 3. Deci fracția este periodică. În continuare arătăm că fracția dată este periodică mixtă. Într-adevăr, dacă n este par numărătorul este impar, iar numitorul conține printre factori pe 2 și 3. Dacă n este impar, numărătorul este de paritate simplă adică îl conține pe 2 o singură dată, pe cînd numitorul este de paritate dublă deoarece îl conține pe 2 de două ori, în afară de factorul 3. În acest fel după simplificare numitorul conține factorii 2 și 3 și prin urmare fracția se transformă în fracție periodică mixtă.

II. 9. Să se arate că redușa de rang n a fracției continue $(2, 2, 2, \dots)$ este egală cu $\frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1} - (1 - \sqrt{2})^{n+1}}{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}$.

Rezolvare. Forma generală a fracției continue este:

$$[a_1, a_2, a_3, \dots] = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}$$

Redusele acestei fracții sînt fracțiile ordinare:

$$R_1 = a_1, R_2 = a_1 + \frac{1}{a_2}, R_3 = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}, \dots$$

$$R_n = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$$

Se notează $A_1 = a_1$, $B_1 = 1$; atunci $R_1 = \frac{A_1}{B_1}$, $R_2 = a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2} = \frac{A_2}{B_2}$ cu $A_2 = a_1 a_2 + 1$ și $B_2 = a_2$.

$$R_3 = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} = \frac{(a_1 a_2 + 1) a_3 + a_1}{a_2 a_3 + 1} = \frac{A_3}{B_3}$$

cu $A_3 = (a_1 a_2 + 1) a_3 + a_1 = A_2 a_3 + A_1$, $B_3 = a_2 a_3 + 1 = B_2 a_3 + B_1$.

Prin inducție matematică se demonstrează că $R_k = \frac{A_k}{B_k}$, unde $A_k = A_{k-1}a_k + A_{k-2}$, $B_k = B_{k-1}a_k + B_{k-2}$. Într-adevăr R_{k+1} se obține din R_k prin înlocuirea lui a_k cu $a_k +$

$$+ \frac{1}{a_{k+1}}. \text{ Deci } R_{k+1} = \frac{A_{k-1} \left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}} \right) + A_{k-2}}{B_{k-1} \left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}} \right) + B_{k-2}} = \frac{(A_{k-1}a_k + A_{k-2})a_{k+1} + A_{k-1}}{(B_{k-1}a_k + B_{k-2})a_{k+1} + B_{k-1}} = \frac{A_k a_{k+1} + A_{k-1}}{B_k a_{k+1} + B_{k-1}} = \frac{A_{k+1}}{B_{k+1}}.$$

În notațiile de la început $R_n = \frac{A_n}{B_n}$, $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 2$. Se demonstrează prin inducție completă că

$$A_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(1 + \sqrt{2})^{n+1} - (1 - \sqrt{2})^{n+1} \right], \quad (1)$$

$$B_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \right]. \quad (2)$$

Pentru $n = 1$, $A_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} [(1 + \sqrt{2})^2 - (1 - \sqrt{2})^2] = 2 = a_1$, deci (1) este adevărată.

Pentru $n = 2$

$$A_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} [(1 + \sqrt{2})^3 - (1 - \sqrt{2})^3] = 5 = a_1 a_2 + 1 \text{ (adevărată).}$$

Presupunind că (1) este adevărată până la n inclusiv și să arătăm că este adevărată și pentru $n + 1$. Într-adevăr, din $A_{n+1} = A_n a_{n+1} + A_{n-1}$ și $a_{n+1} = 2$ și din $A_{n-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} [(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n]$ rezultă $A_{n+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} [(1 + \sqrt{2})^{n+1} - (1 - \sqrt{2})^{n+1}]$.

$$\cdot 2 + \frac{1}{2\sqrt{2}} [(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n] = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \{ (1 + \sqrt{2})^n \cdot [2(1 + \sqrt{2}) + 1] - (1 - \sqrt{2})^n [2(1 - \sqrt{2}) + 1] \} = \frac{1}{2\sqrt{2}} [(1 + \sqrt{2})^{n+2} - (1 - \sqrt{2})^{n+2}].$$

Analog se arată și pentru B_n . Din (1) și (2) rezultă rezolvarea completă a problemei.

II. 10. Să se arate că:

a) produsul a n numere pozitive, a căror sumă este dată, este maxim, când factorii sînt egali;

b) suma pătratelor a n numere pozitive, a căror sumă este dată, este minimă când numerele sînt egale între ele;

c) suma a n numere pozitive, al căror produs este dat, este minimă când numerele sînt egale între ele.

Rezolvare. Fie

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \quad (1)$$

n numere pozitive a căror sumă este s , adică $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = s$. Se consideră numerele

$$A_1 = \frac{s}{n}, \quad A_2 = \frac{s}{n}, \quad A_3 = \frac{s}{n}, \dots, A_n = \frac{s}{n}. \quad (2)$$

a căror sumă este tot s , adică $A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n = s$.

a) Presupunind $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n$, se obține $a_1 > \frac{s}{n}$, $a_n < \frac{s}{n}$.

Fie $p = a_1 - \frac{s}{n} > 0$. Înlocuind în (1) pe a_1 prin $a_1 - p = \frac{s}{n}$ și pe a_n prin $a_n + p$, suma rămîne aceeași dar produsul termenilor crește, căci $(a_1 - p) \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_{n-1} \cdot (a_n + p) = a_1 \cdot a_2 \dots a_n + p(a_1 - p - a_n) a_2 \dots a_{n-1} > a_1 \cdot a_2 \dots a_n$.

Deci șirul de numere $\frac{s}{n}, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n + p$ (3) are suma termenilor egală cu s și produsul termenilor mai mare decît produsul termenilor șirului (1). Prin același procedeu se aduc toți termenii șirului (1) la valoarea $\frac{s}{n}$ și deci $A_1 \cdot A_2 \dots A_n > a_1 \cdot a_2 \dots a_n$ cu

$$A_i = \frac{s}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \text{ De aici rezultă că } a_1 \cdot a_2 \dots a_n < \left(\frac{s}{n} \right)^n.$$

b) În aceleași condiții ca cele de la punctul a), se arată $(a_1 - p)^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 + (a_n + p)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2p^2 - 2p(a_1 - a_n) < a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$, deoarece $a_1 - a_n > p$. Procedind în mod analog cu fiecare termen al șirului (1) se ajunge la concluzia că suma pătratelor termenilor șirului (1) devine minimă cînd toți termenii sînt egali cu $\frac{s}{n}$. Deci $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ este minim dacă $a_i = \frac{s}{n}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) cu

$a_1 + a_2 + \dots + a_n = s$ (dat).

c) Fie $a_1 \cdot a_2 \dots a_n = P$, $a = \sqrt[n]{P}$ și $\underbrace{a \cdot a \dots a}_{n \text{ factori}} = P$ cu P dat. Conform punctului a)

se obține n -factori

$$a_1 \cdot a_2 \dots a_n < \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^n,$$

adică

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \dots a_n} < \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

De unde

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n > n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = n \sqrt[n]{P} = na.$$

Deci

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n > \underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ termeni}}$$

prin urmare, suma a n numere pozitive, al căror produs este dat, este minimă cînd numerele sînt egale între ele.

II. 11. Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n$ sînt n numere strict pozitive, să se demonstreze inegalitățile $M \leq G \leq A$, în care M este media armonică a numerelor date, G media geometrică, iar A este media aritmetică.

Rezolvare. Fie

$$M = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}, \quad G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \dots a_n}, \quad A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

conform definițiilor acestor medii. Trebuie arătat că

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}. \quad (1)$$

Parțial relația (1) s-a demonstrat la problema precedentă. Din $G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \dots a_n}$, rezultă $\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \dots \frac{1}{a_n} = \frac{1}{G^n}$. Se știe că, suma a n numere pozitive al căror produs este

dat, este minimă cînd numerele sînt egale între ele, adică $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{G} + \frac{1}{G} + \dots + \frac{1}{G} = \frac{n}{G}$. De aici se obține $\frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \frac{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}}{n}$ sau

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \text{ egalitatea avînd loc cînd } a_1 = a_2 = \dots = a_n.$$

II. 12. Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ au loc inegalitățile

$$n^n \leq (n!)^2 \leq n^n \left(\frac{n+1}{3} \right)^{n+1}.$$

Rezolvare. Din problema precedentă reiese

$$M \leq G \leq A. \quad (1)$$

Se consideră numerele $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, \dots, (n-1)n$; conform relației (1) rezultă

$$\frac{n-1}{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}} \leq \sqrt[n+1]{(n-1)!n} \leq \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n}{n-1}. \quad (2)$$

Dar

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$$

și

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n = \sum_{k=2}^n (k^2 - k) = \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

Introducînd aceste valori în (2) se obține: $n \leq \sqrt[n-1]{(n-1)!n} \leq \frac{n(n+1)}{3}$ sau

$n^{n-1} \leq (n-1)!n \leq n^{n-1} \left(\frac{n+1}{3} \right)^{n-1}$, care prin înmulțire cu n dă relația din problemă.

Observație. Inegalitățile se pot demonstra și prin metoda inducției complete.

II.13. Să se arate că media aritmetică a n numere pozitive este mai mică sau cel mult egală cu rădăcina de ordin p din media aritmetică a puterii p a celor n numere, adică

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt[p]{\frac{a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p}{n}}. \quad (1)$$

Rezolvare. Se presupune că $a_1 > a_2 > \dots > a_n$ și fie $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, atunci $a_1 > \frac{s}{n}$ și $a_n < \frac{s}{n}$. Fie acum $a > b \geq m > 0$, atunci $a + m$ și $b - m$ au aceeași sumă ca și $a + b$, dar sînt mai îndepărtate unul de altul decît a și b . Se arată că

$$(a+m)^p + (b-m)^p > a^p + b^p. \quad (2)$$

Într-adevăr, după binomul lui Newton se scrie

$$(a+m)^p + (b-m)^p = a^p + b^p + C_p^1(a^{p-1} - b^{p-1})m + C_p^2(a^{p-2} + b^{p-2})m^2 + \dots + C_p^k[a^{p-k} + (-1)^k b^{p-k}]m^k + \dots + [1 + (-1)^p]m^p.$$

Cum toți termenii sînt pozitivi, reținînd în membrul drept numai $a^p + b^p$, rezultă inegalitatea (2).

Din raționamentu de mai sus urmează că $a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p \geq$

$$\geq \underbrace{\left(\frac{s}{n} \right)^p + \left(\frac{s}{n} \right)^p + \dots + \left(\frac{s}{n} \right)^p}_{n \text{ - termeni}} = \frac{n(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^p}{n^p}$$

sau

$$\frac{a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p}{n} \geq \left[\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right]^p. \quad (3)$$

Extrăgând rădăcina de ordinul p din ambii membri ai inegalității (3), se obține inegalitatea (1), egalitatea avînd loc pentru $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

II.14. Fie $2n$ numere reale $a_i, b_i (i = 1, 2, \dots, n)$. Să se arate că are loc inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2),$$

egalitatea avînd loc numai în cazul $a_i = c b_i, c \in R (i = 1, 2, \dots, n)$.

Rezolvare. Metoda 1. Deoarece $2a_i b_j a_j b_i \leq a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2, \forall i < j, i = 1, 2, \dots, n-1, j = 2, 3, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 &= \sum_{i=1}^n a_i^2 b_i^2 + 2 \sum_{j=2}^n a_1 b_j a_j b_1 + 2 \sum_{j=3}^n a_2 b_j a_j b_2 + 2 \sum_{j=4}^n a_3 b_j a_j b_3 + \\ &+ \dots + 2 \sum_{j=n-1}^n a_{n-2} b_j a_j b_{n-2} + 2 a_{n-1} b_n a_n b_{n-1} \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 b_i^2 + \sum_{j=2}^n (a_1^2 b_j^2 + a_j^2 b_1^2) + \\ &+ \sum_{j=3}^n (a_2^2 b_j^2 + a_j^2 b_2^2) + \sum_{j=4}^n (a_3^2 b_j^2 + a_j^2 b_3^2) + \dots + \sum_{j=n-1}^n (a_{n-2}^2 b_j^2 + a_j^2 b_{n-2}^2) + (a_{n-1}^2 b_n^2 + \\ &+ a_n^2 b_{n-1}^2) = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right), \end{aligned}$$

adică tocmai inegalitatea din enunț. Egalitatea are loc pentru $a_i = c b_i, c \in R (i = 1, 2, \dots, n)$.

Metoda 2. Se consideră $\sum_{i=1}^n (a_i x - b_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) x^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) x + \sum_{i=1}^n b_i^2 \geq 0$, pentru orice $x \in R$. Rezultă că discriminantul trinomului de gradul doi în x este negativ, adică $\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq 0$, care este tocmai inegalitatea din problema.

II.15. Să se arate că expresia $E = \sqrt{36 + 14\sqrt{6} + 14\sqrt{5} + 6\sqrt{30}}$ se poate pune sub formă de sumă de rădăcini pătrate a patru numere întregi pozitiv.

Rezolvare. Folosind formula $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$, unde $C^2 = A^2 - B$ se obține

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{(36 + 14\sqrt{5}) + \sqrt{(14\sqrt{6} + 6\sqrt{30})^2}} = \sqrt{\frac{36 + 14\sqrt{5} + 2\sqrt{5}}{2}} + \\ &+ \sqrt{\frac{36 + 14\sqrt{5} - 2\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{18 + 8\sqrt{5}} + \sqrt{18 + 6\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{18+2}{2}} + \\ &+ \sqrt{\frac{18-2}{2}} + \sqrt{\frac{18+12}{2}} + \sqrt{\frac{18-12}{2}} = \sqrt{10} + \sqrt{8} + \sqrt{15} + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

II.16. Să se determine numerele raționale pozitive x, y, z astfel ca

$$\sqrt{3 + \sqrt{1 + 2\sqrt{7}}} = \sqrt{x + \sqrt{z}} + \sqrt{y - \sqrt{z}}.$$

Rezolvare. Ridicând ambii membri ai egalității la pătrat și folosind egalitatea numerelor iraționale pătratice se obține

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2\sqrt{xy - z} + (y - x)\sqrt{z} = \sqrt{1 + 2\sqrt{7}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ 4(xy - z) = 1 \\ 4(y - x)\sqrt{z} = 2\sqrt{7} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ 4(xy - z) = 1 \\ 4(y - x)^2 z = 7 \end{cases} \Rightarrow 4z(8 - 4z) = 7 \Rightarrow z_1 = \frac{1}{4}, \quad z_2 = \frac{7}{4}.$$

Dar $\sqrt{z}$ este un număr irațional, deci $z = \frac{7}{4}$ și

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1, y_1 = 2, \text{ sau } x_2 = 2, y_2 = 1.$$

Însă $y \geq \sqrt{z} \Rightarrow y = 2, x = 1$ și deci

$$\sqrt{3 + \sqrt{1 + 2\sqrt{7}}} = \sqrt{1 + \sqrt{\frac{7}{4}}} + \sqrt{2 - \sqrt{\frac{7}{4}}}.$$

II.17. Să se determine numerele raționale pozitive x, y, z astfel ca

$$\sqrt{16 + 4\sqrt{6} - 4\sqrt{10} - 2\sqrt{15}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z}, \quad (1)$$

$$\sqrt[3]{36\sqrt{3} - 38\sqrt{2}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}. \quad (2)$$

Rezolvare. Pentru (1) se folosește formula de transformare a radicalilor dubli în radicali simpli: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$ cu $C = \sqrt{A^2 - B}$. Deci $A = 16 - 2\sqrt{15}$, $B = (4\sqrt{10} - 4\sqrt{6})^2$, $C = 2\sqrt{15} \Rightarrow \sqrt{(16 - 2\sqrt{15}) - \sqrt{(4\sqrt{10} - 4\sqrt{6})^2}} = \sqrt{8} - \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = \sqrt{8} + \sqrt{3} - \sqrt{5} \Rightarrow x = 8, y = 3, z = 5$ sau $x = 3, y = 8, z = 5$.

Pentru (2) se ridică la cub:

$$\begin{cases} (x + 3y)\sqrt{x} = 36\sqrt{3} \\ (3x + y)\sqrt{y} = 38\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow x = 3a^2, y = 2b^2 \text{ și } \begin{cases} (3a^2 + 6b^2)a = 36 \\ (9a^2 + 2b^2)b = 38 \end{cases}$$

Se notează $a = bt$ și se împart ecuațiile membru cu membru:

$$\frac{(t^2 + 2)t}{9t^2 + 2} = \frac{6}{19} \Rightarrow 19t^3 - 54t^2 + 38t - 12 = 0 \Rightarrow (t - 2) \cdot (19t^2 - 16t + 6) = 0 \Rightarrow t_1 = 2, t_{2,3} = \frac{8 \pm i\sqrt{50}}{19}.$$

Înlocuind $t = 2$ în ecuația $b^3(t^2 + 2)t = 12$ se obține $b = 1$. Deci $a = 2$ și

$$\sqrt[3]{36\sqrt{3} - 38\sqrt{2}} = 2\sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

II.18. Să se aducă la o formă mai simplă expresia:

$$E = \sqrt[3]{63\sqrt{3} + 58\sqrt{5}} - \sqrt[3]{99 - 70\sqrt{2}}.$$

Rezolvare. Fie x, y, u, v numere raționale pozitive astfel ca:

$$\sqrt[3]{63\sqrt{3} + 58\sqrt{5}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \quad (1)$$

$$\sqrt[3]{99 - 70\sqrt{2}} = u - \sqrt{v}. \quad (2)$$

Procedind ca în exercițiul precedent se obține $x = 3, y = 2^2 \cdot 5, u = 3, v = 2^2 \cdot 2$ și $E = \sqrt{3} + 2\sqrt{5} + 3 - 2\sqrt{2}$.

II.19. Să se facă rațional numitorul fracției

$$F = \frac{a}{x\sqrt[3]{y} + y\sqrt[3]{x}}.$$

Rezolvare. În relația $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$ înlocuind $A = x\sqrt[3]{y}$, $B = y\sqrt[3]{x}$; se obține

$$F = \frac{a(x^2\sqrt[3]{y^2} - xy\sqrt[3]{xy} + y^2\sqrt[3]{x^2})}{x^3y + y^3x}.$$

II.20. Să se facă rațional numitorul fracției

$$F = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}}.$$

Rezolvare. Din identitatea $(A + B + C)(A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA) = A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC$, rezultă că trebuie amplificată fracția cu $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{z^2} - \sqrt[3]{xy} - \sqrt[3]{yz} - \sqrt[3]{zx}$; se obține

$$F = \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{z^2} - \sqrt[3]{xy} - \sqrt[3]{yz} - \sqrt[3]{zx}}{x + y + z - 3\sqrt[3]{xyz}}.$$

În continuare se amplifică fracția cu $(x + y + z)^2 + 3(x + y + z)\sqrt[3]{xyz} + 9\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$,

$$F = \frac{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{z^2} - \sqrt[3]{xy} - \sqrt[3]{yz} - \sqrt[3]{zx}) \cdot [(x + y + z)^2 + 3(x + y + z)\sqrt[3]{xyz} + 9\sqrt[3]{x^2y^2z^2}]}{(x + y + z)^3 - 27xyz}.$$

II.21. Se dă fracția

$$F = \frac{\sqrt{\frac{15a + 13b}{6}} + \sqrt{\frac{a + b}{2}}}{\sqrt{3a + 2bm + 5a^2 + 7abm + 3b^2m^2 - b^2}}$$

cu $a, b, m \in Q$ și $a > 0, b > 0$.

a) Să se determine m astfel ca numitorul să poată fi făcut rațional prin amplificarea fracției cu o expresie de forma $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ cu $x, y \in Q_+$.

b) Să se arate că, pentru valoarea pozitivă a lui m determinată, fracția devine egală cu 1.

Rezolvare. a) Trebuie ca

$$\sqrt{3a + 2bm + 5a^2 + 7abm + 3b^2m^2 - b^2} = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \text{ cu } x, y \in Q_+$$

sau, folosind formula $\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}}$, în care $C = \sqrt{A^2 - B} \in Q$ se poate scrie

$$\sqrt{3a + 2bm + 5a^2 + 7abm + 3b^2m^2 - b^2} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}},$$

cu $A = 3a + 2bm$ și $C^2 = (3a + 2bm)^2 - 5a^2 - 7abm - 3b^2m^2 + b^2 = b^2 \left[4 \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 5m \left(\frac{a}{b} \right) + 1 + m^2 \right]$. În paranteza mare este un pătrat perfect;

$$\Delta = 25m^2 - 16(1 + m^2) = 0 \Rightarrow m_{1,2} = \pm \frac{4}{3}.$$

b) Pentru $m = \frac{4}{3}$, $A = 3a + \frac{8b}{3}$, $C^2 = \left(2a + \frac{5b}{3} \right)^2$, numitorul are forma

$$\sqrt{3a + \frac{8b}{3}} + \sqrt{5a^2 + \frac{28}{3}ab + \frac{13}{3}b^2} = \sqrt{\frac{15a + 13b}{6}} + \sqrt{\frac{a+b}{2}}$$

și $F = 1$. Pentru $m = -\frac{4}{3}$, numitorul este

$$\sqrt{3a - \frac{8b}{3}} + \sqrt{5a^2 - \frac{28}{3}ab + \frac{13}{3}b^2} = \sqrt{\frac{15a - 13b}{6}} + \sqrt{\frac{a-b}{2}}.$$

PROBLEME PROPUSE

II. 1. Să se arate că oricare ar fi numărul natural n , numărul $X = n \cdot 45^{n+1} - 8 \cdot 45^n - 8^2(n+1) \cdot 45^{n+1} + 53 \cdot 8$ este divizibil cu 37 și cu 53.

II. 2. Să se determine numărul natural A știind că este divizibil prin 2, 5 și 7, iar cel mai mare divizor comun al numerelor A și $\frac{24}{25} \cdot A$ este 196.

II. 3. Să se afle un număr A de forma $A = 2^x \cdot 5^y \cdot 7^z$ știind că $5 \cdot A$ are cu 8 divizori pozitivi mai mulți decât A și $7 \cdot A$ are cu 12 divizori pozitivi mai mulți decât A .

II. 4. Să se afle cea mai mică fracție, astfel încât împărțind-o cu fracțiile $\frac{26}{245}$, $\frac{19}{110}$, $\frac{12}{415}$ să se obțină cituri întregi.

II. 5. Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, suma fracțiilor $\frac{n}{3} + \frac{19n^2}{36} + \frac{n^3}{6} + \frac{17n^4}{18} + \frac{n^6}{36}$ este număr întreg.

II. 6. Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, fracția egală cu $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$ se transformă în periodică mixtă.

II. 7. Să se afle numărul de forma $\overline{abba}$, care să fie cub perfect în toate bazele de numerație mai mari ca 3.

II. 8. Să se verifice egalitățile:

$$-111_2 + 222_3 + 333_4 + 444_5 + 555_6 + 666_7 - 777_8 + 888_9 = 980_{10} \quad (1)$$

$$[1322_6 - 34_5] \cdot 21_3 - 113_4 \cdot [131_7 - 13_4] - 609_{10} = 152_{10} \quad (2)$$

$$\left\{ [202, 02]_3 \cdot [32, (201)]_4 - [21, 31(112)]_5 : \left[\frac{105445}{3331} \right]_6 \right\} \cdot \sqrt{2061}_7 = 17337_8, \quad (3)$$

unde indicii indică bazele de numerație.

II. 9. Să se arate că

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

II. 10. Să se demonstreze direct și prin metoda inducției matematice că

$$1^1 - 2^3 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

II. 11. Folosind metoda inducției matematice, să se demonstreze egalitățile:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^5} + \dots + \frac{n}{2^{2n-1}} = \frac{1}{9} \left(8 - \frac{3n+4}{2^{2n-1}} \right), \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} - \frac{4}{2^4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{n}{2^n} = \frac{1}{9} \left[2 + (-1)^{n-1} \cdot \frac{3n+2}{2^n} \right]. \quad (2)$$

II. 12. Dându-se $2n$ numere reale pozitive $a_i \geq 0, b_i > 0, (i = 1, 2, \dots, n)$, se consideră rapoartele $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$, dintre care se presupune că cel mai mic este $\frac{a_1}{b_1}$, iar cel mai mare este $\frac{a_n}{b_n}$. Să se demonstreze inegalitățile:

$$\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \leq \frac{a_n}{b_n}.$$

În particular, dacă $b_1 = b_2 = \dots = b_n$, atunci $a_1 < \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} < a_n$, adică media aritmetică a n numere nenegative este cuprinsă între cel mai mic și cel mai mare dintre aceste numere.

II.13. Să se arate că dacă $a_1, a_2, \dots, a_n$ sînt n numere reale strict pozitive, atunci sînt adevărate inegalitățile:

$$\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2 + a_3^2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}^2 + a_n^2}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n^2 + a_1^2}{a_n + a_1} \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad (1)$$

$$\frac{a_1 + a_2}{a_1^2 + a_2^2} + \frac{a_2 + a_3}{a_2^2 + a_3^2} + \dots + \frac{a_{n-1} + a_n}{a_{n-1}^2 + a_n^2} + \frac{a_n + a_1}{a_n^2 + a_1^2} \leq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}. \quad (2)$$

II.14. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$, n numere reale strict pozitive, astfel că $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$. Să se arate că are loc inegalitatea

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n.$$

II.15. Dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi, atunci are loc inegalitatea

$$\left(a + \frac{b}{c}\right) \cdot \left(a + \frac{c}{b}\right) \geq (|b - c| + 1)^2.$$

II.16. a) Dacă a, b sînt numere reale strict pozitive astfel că $a + b = 1$, atunci are loc inegalitatea

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

b) Dacă a, b, c sînt numere reale strict pozitive, astfel că $a + b + c = 1$, atunci are loc inegalitatea

$$\frac{8}{27abc} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 1.$$

II.17. a) Dacă $n \geq 2$ și $a_1, a_2, \dots, a_n$ sînt numere reale strict pozitive, atunci

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) < 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n. \quad (1)$$

b) Dacă $n \geq 2$ și $a_1, a_2, \dots, a_n$ sînt numere reale strict pozitive mai mici decît 1, atunci

$$(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n) < 1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_n). \quad (2)$$

c) Să se deducă din a) și b) inegalitatea lui Bernoulli:

$$(1 + a)^n \geq 1 + na \quad \text{pentru } a > -1. \quad (3)$$

II. 18. Să se arate că oricare ar fi numerele reale strict pozitive a, b, c, x, y, z există întotdeauna inegalitatea:

$$\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) \geq 9.$$

Generalizare.

Să se arate că:

$$\text{II.19. } \sqrt[3]{3 - \sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{1 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt[6]{7 + 3\sqrt{5}} - 2 = 0.$$

$$\text{II.20. } \sqrt{4 + \sqrt{7}} + \sqrt{4 - \sqrt{7}} = \sqrt{14}.$$

$$\text{II.21. } \sqrt[3]{8 + 5\sqrt{3}} + \sqrt[3]{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt[3]{8 - 5\sqrt{3}} + \sqrt[3]{7 - 4\sqrt{3}} = 2.$$

$$\text{II.22. } \sqrt[5]{44\sqrt{3} + 76} - \sqrt[5]{44\sqrt{3} - 76} = 2.$$

II.23. Să se arate că

$$n = \sqrt[26]{26 + 6\sqrt{13 - 4\sqrt{8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}}} + \sqrt[26]{26 - 6\sqrt{13 + 4\sqrt{8 - 2\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}}}$$

este un număr natural.

II. 24. Să se determine numerele raționale pozitive x, y, z astfel ca

$$\sqrt{10 + \sqrt{24}} + \sqrt{40} + \sqrt{60} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

II. 25. Să se arate că

$$\sqrt[3]{\frac{3}{2}[11 - \sqrt{21} + \sqrt{6(5 - \sqrt{21})}]} - \sqrt{6 - \sqrt{6}} - \sqrt{15 - 6\sqrt{6}} = \sqrt{3}.$$

II. 26. Să se extragă rădăcina cubică din numărul

$$34\sqrt{2} + 27\sqrt{3}$$

punînd rezultatul sub forma $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, cu $x > 0, y > 0$ raționali.

II. 27. Să se calculeze

$$E = \sqrt{a + 2\sqrt{a - 1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a - 1}}, \quad a \in [1, +\infty).$$

II. 28. Să se arate că dacă $x > 2$ este un număr rațional oarecare, atunci numărul

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^3 - 3x + (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{x^3 - 3x - (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4}}{2}}$$

este rațional și mai mare decât 2.

II. 29. Să se arate că dacă $x > 3$ este un număr rațional oarecare, atunci

$$y = \sqrt[3]{x\sqrt{x-3} + 3x - 8} - \sqrt[3]{x\sqrt{x-3} - 3x + 8}$$

este un număr natural.

Să se facă raționali numitorii fracțiilor:

II. 30. $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}}.$

II. 31. $\frac{1}{\sqrt{10} + \sqrt{15} + \sqrt{14} - \sqrt{21}}.$

II. 32. $\frac{2 - \sqrt{6}}{\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6} - 2}.$

II. 33. $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x+y}}.$

II. 34. $\frac{\sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{y}}}{\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}}}.$

II. 35. $\frac{a}{\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y}}.$

II. 36. $\frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z}}.$

II. 37. $\frac{1}{\sqrt[p]{x} - \sqrt[q]{y}}.$

II. 38. Să se simplifice fracția

$$\frac{\sqrt[3]{46\sqrt{2} + 29\sqrt{5}} - \sqrt[3]{18\sqrt{3} + 14\sqrt{5}} + \sqrt[3]{36\sqrt{3} - 38\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{18\sqrt{3} - 14\sqrt{5}} - \sqrt[3]{17\sqrt{2} - 11\sqrt{5}}}$$

II. 39. Se dau numerele $N_1 = a\sqrt{a} + \sqrt{ab}$, $N_2 = b\sqrt{b} + \sqrt{ab}$, cu a , b numere reale strict pozitive.

Să se demonstreze următoarele:

a) Dacă $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 3$ și $\sqrt{ab} = 1$, atunci $N_1 + N_2 = N_1 \cdot N_2 = 20$.

b) Dacă numerele $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ și $\sqrt{ab}$ sînt raționale atunci și numerele $N_1 + N_2$ și $N_1 \cdot N_2$ sînt raționale.

c) Dacă a și b sînt numere raționale strict pozitive, atunci condiția necesară și suficientă ca numerele N_1 și N_2 să fie raționale este ca numerele $\sqrt{a}$ și $\sqrt{b}$ să fie raționale.

II. 40. Să se calculeze expresiile:

$$E_2 = \sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b}\dots}}}, \quad a > 0, b > 0.$$

$$E_3 = \sqrt[3]{a\sqrt[3]{b\sqrt[3]{c\sqrt[3]{a\sqrt[3]{b\sqrt[3]{c}\dots}}}}}, \quad a > 0, b > 0, c > 0.$$

$$E_n = \sqrt[n]{a_1\sqrt[n]{a_2\dots\sqrt[n]{a_n\sqrt[n]{a_1\sqrt[n]{a_2\dots\sqrt[n]{a_n}\dots}}}}}, \quad a_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n).$$

Capitolul III

ECUAȚII DE GRADUL ÎNTÎI, AL DOILEA ȘI ECUAȚII REDUCTIBILE LA ACESTEA. INECUAȚII

PROBLEME REZOLVATE

III. 1. Să se determine a astfel ca ecuația

$$\frac{a-1}{x-1} + \frac{2a+1}{x^2-1} - \frac{3a-1}{x^2+4x+3} = 0$$

să fie de gradul întâi; să se rezolve apoi ecuația obținută.

Rezolvare. Se aduc fracțiile la același numitor, observând că $x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$; se obține

$$\frac{x^2(a-1) + x(3a-2) + 12a-1}{(x^2-1)(x+3)} = 0$$

Această ecuație este de gradul întâi dacă numitorul este diferit de zero ($x \in R \setminus \{-3, -1, 1\}$) și coeficientul lui x^2 este egal cu zero, adică $a = 1$.

Pentru $a = 1$ se obține ecuația $x + 11 = 0 \Rightarrow x = -11$.

III. 2. Să se arate că pentru $m \in R \setminus \{5\}$ ecuația

$$\frac{(4m-6)x^2 + (m+1)x + 3m+4}{x^3+1} - \frac{mx+2}{x^2-x+1} - \frac{2m-1}{x+1} = 0$$

este de gradul întâi.

Rezolvare. Frațiile sînt definite pentru $x \in R \setminus \{-1\}$. Aducînd la același numitor și ordonînd după puterile lui x se obține ecuația

$$\frac{x^2(m-5) + 2x(m-1) + m+3}{x^3+1} = 0.$$

Pentru ca ecuația să fie de gradul întâi pentru orice $m \in R \setminus \{5\}$ trebuie ca fracția să se simplifice. După simplificare prin $x+1$, ecuația devine

$$\frac{(m-5)x + m+3}{x^2-x+1} = 0 \Rightarrow (m-5)x + m+3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{m+3}{m-5},$$

pentru orice $m \neq 5$. Pentru $m = 5$ ecuația dată ne conduce la

$$\frac{8(x+1)}{x^3+1} = 0 \Rightarrow \frac{8}{x^2-x+1} = 0$$

care este imposibilă.

III. 3. Să se discute, după valorile parametrului real m , ecuațiile:

$$\frac{2+m}{m^2-1}x + \frac{6}{m-1} = \frac{-3}{1-m}x, \quad m \in R \setminus \{-1, 1\}, \quad (1)$$

$$\frac{mx}{m-2} + \frac{2x}{m-3} = \frac{4-m(4x-1)}{m^2-5m+6}, \quad m \in R \setminus \{2, 3\}. \quad (2)$$

Rezolvare. Eliminînd numitorul, ecuația (1) se scrie

$$(2m+1) \cdot x = 6 \cdot (m+1) \Rightarrow x = \frac{6(m+1)}{2 \cdot m+1}.$$

a) Pentru $m \in R \setminus \left\{-1, -\frac{1}{2}, 1\right\}$, ecuația (1) admite rădăcina finită $x = \frac{6(m+1)}{2m+1}$.

b) Pentru $m = -\frac{1}{2}$, ecuația (1) este imposibilă ($-2x - 4 = -2x$).

Ecuația (2), după eliminarea numitorului, se scrie

$$(m^2+3m-4) \cdot x - m - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{m+4}{m^2+3m-4}.$$

Dar $m^2+3m-4=0$ pentru $m_1 = -4$, $m_2 = 1$.

a) Pentru $m \in R \setminus \{-4, 1, 2, 3\}$, ecuația (2) admite rădăcina finită $x = \frac{m+4}{m^2+3m-4} = \frac{1}{m-1}$.

b) Pentru $m = -4$, ecuația (2) devine

$$\frac{-4x}{-6} + \frac{2x}{-7} = \frac{4+4(4x-1)}{42} \Rightarrow \frac{8x}{21} = \frac{8x}{21},$$

adică ecuația (2) este nedeterminată.

c) Pentru $m = 1$, ecuația (2) este imposibilă ($-2x = -2x + 4$).

III. 4. Să se rezolve în mulțimea R ecuația

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{\frac{x^2}{1+x}} = \sqrt{1+2x}.$$

Rezolvare. Expresiile care intervin în ecuație sînt reale dacă $1+x > 0$, $1+2x \geq 0$ și $1+x \geq \frac{x^2}{1+x} \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Ridicînd ambii membri la puterea a doua se obține ecuația

$$1+x + \frac{x^2}{1+x} - 2|x| = 1+2x. \quad (1)$$

Pentru $x \geq 0$ ecuația (1) devine

$$2x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \in [0, +\infty), x_2 = -\frac{3}{2} \notin [0, +\infty).$$

Pentru $x \leq 0$ ecuația (1) se scrie

$$2x^2 + x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right], x_2 = -\frac{1}{2} \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right].$$

Deci rădăcinile ecuației (1) sînt $-\frac{1}{2}, 0$; aceste rădăcini verifică și ecuația dată. Prin urmare rădăcinile reale ale ecuației date sînt: $-\frac{1}{2}, 0$.

III. 5. Să se rezolve în numere întregi ecuația

$$2x^2 - 5xy + 2y^2 = 17.$$

Rezolvare. Descompunînd membrul întii în factori

$$2x^2 - 5xy + 2y^2 = 2x^2 - 4xy - xy + 2y^2 = (x-2y)(2x-y)$$

se obține ecuația

$$(x-2y)(2x-y) = 17.$$

Deoarece 17 este număr prim și $x-2y \in \mathbb{Z}$, $2x-y \in \mathbb{Z}$, se consideră cazurile:

- | | |
|-----------------|-------------------|
| a) $x-2y = 1$ | și $2x-y = 17$, |
| b) $x-2y = 17$ | și $2x-y = 1$, |
| c) $x-2y = -1$ | și $2x-y = -17$, |
| d) $x-2y = -17$ | și $2x-y = -1$, |

cu $x, y \in \mathbb{Z}$.

Se rezolvă sistemul format de ecuațiile din a):

$$\begin{cases} x-2y = 1 \\ 2x-y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+2y, \\ 2+4y-y = 17 \Rightarrow y = 5, x = 11. \end{cases}$$

Analog, din b) $x = -5, y = -11$, din c) $x = -11, y = -5, y = -5$, din d) $x = 5, y = 11$. Deci mulțimea de soluții pentru ecuația dată este

$$S = \{(11, 5), (-5, -11), -(11, -5), (5, 11)\}.$$

III. 6. Să se rezolve în mulțimea R ecuațiile:

$$|x+1| + 5x + 3 = 0, \quad (1)$$

$$|2-x| + 2x + 5 = |x+7|. \quad (2)$$

Rezolvare. Pentru ecuația (1) rezultă

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{pentru } x+1 > 0, \text{ adică } x \in (-1, +\infty), \\ 0 & \text{pentru } x+1 = 0, \text{ adică } x = -1, \\ -(x+1) & \text{pentru } x+1 < 0, \text{ adică } x \in (-\infty, -1) \end{cases}$$

și (1) se scrie:

$$\text{a) pentru } x \in (-1, +\infty): x+1+5x+3=0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \in (-1, +\infty),$$

$$\text{b) pentru } x = -1: -2 = 0, \text{ ecuație imposibilă,}$$

$$\text{c) pentru } x \in (-\infty, -1): -(x+1)+5x+3=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \notin (-\infty, -1).$$

Deci ecuația (1) are rădăcina $x = -\frac{2}{3}$.

Pentru ecuația (2) rezultă

$$|2-x| = \begin{cases} 2-x & \text{pentru } 2-x > 0, \text{ adică } x \in (-\infty, 2), \\ 0 & \text{pentru } 2-x = 0, \text{ adică } x = 2, \\ -(2-x) & \text{pentru } 2-x < 0, \text{ adică } x \in (2, +\infty); \end{cases}$$

$$|x+7| = \begin{cases} x+7 & \text{pentru } x+7 > 0, \text{ adică } x \in (-7, +\infty), \\ 0 & \text{pentru } x+7 = 0, \text{ adică } x = -7, \\ -(x+7) & \text{pentru } x+7 < 0, \text{ adică } x \in (-\infty, -7). \end{cases}$$

Se rezolvă ecuația (2), x aparținînd mulțimilor $(-\infty, -7)$, $\{-7\}$, $(-7, 2)$, $\{2\}$, $(2, +\infty)$:

$$\text{a) } x \in (-\infty, -7): 2-x+2x+5 = -(x+7) \Rightarrow x = -7 \notin (-\infty, -7);$$

$$\text{b) } x = -7: 9-14+5=0 \Rightarrow x = -7 \text{ este rădăcină;}$$

$$\text{c) } x \in (-7, 2): 2-x+2x+5 = x+7 \Rightarrow x+7 = x+7 \text{ ecuația este nedeterminată;}$$

$$\text{d) } x = 2: 4+5=2+7 \Rightarrow x = 2 \text{ este rădăcină;}$$

$$\text{e) } x \in (2, +\infty): -(2-x)+2x+5 = x+7 \Rightarrow x = 2 \notin (2, +\infty).$$

Deci rădăcinile ecuației (2) sînt -7 și 2 , iar pentru $x \in (-7, 2)$, ecuația (2) este nedeterminată.

III. 7. Să se rezolve în mulțime: R ecuația

$$|3x - m + 4| + 2m + x + 5 = 0,$$

unde m este un parametru real.

Rezolvare. Folosind definiția valorii absolute se obțin ecuațiile:

$$3x - m + 4 + 2m + x + 5 = 0 \quad \text{pentru } 3x - m + 4 > 0, \quad (1)$$

$$2m + x + 5 = 0 \quad \text{pentru } 3x - m + 4 = 0, \quad (2)$$

$$-(3x - m + 4) + 2m + x + 5 = 0 \quad \text{pentru } 3x - m + 4 < 0. \quad (3)$$

Rezultă:

$$- \text{din (1): } x = -\frac{m+9}{4} \quad \text{pentru } 3x - m + 4 > 0 \Rightarrow m \in \left(-\infty, -\frac{11}{7}\right),$$

$$- \text{din (2): } x = -2m - 5 \quad \text{pentru } 3x - m + 4 = 0 \Rightarrow m = -\frac{11}{7},$$

$$- \text{din (3): } x = \frac{3m+1}{2} \quad \text{pentru } 3x - m + 4 < 0 \Rightarrow m \in \left(-\infty, -\frac{11}{7}\right).$$

Deci pentru $m \in \left(-\infty, -\frac{11}{7}\right)$, $x_1 = -\frac{m+9}{4}$ și $x_2 = \frac{3m+1}{2}$, iar pentru

$$m = -\frac{11}{7}, x = -\frac{13}{7}.$$

III. 8. Să se rezolve ecuația

$$\left[3x - 4\frac{5}{6}\right] - 2x - 1 = 0,$$

unde simbolul $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a , adică numărul întreg t cu proprietatea $t \leq a < t + 1$.

Rezolvare. Fie $t \in Z$ astfel ca $t = \left[3x - 4\frac{5}{6}\right]$; ecuația se scrie $t - 2x - 1 = 0$, de unde $x = \frac{t-1}{2}$ și deci $t = \left[\frac{9t-38}{6}\right]$. Ținând seama de definiția simbolului $[]$ se scrie dubla inegalitate:

$$t \leq \frac{9t-38}{6} < t+1.$$

Prima inegalitate are loc pentru $t \in \left[12\frac{2}{3}, +\infty\right)$, iar a doua are loc pentru $t \in \left(-\infty, 14\frac{2}{3}\right)$ și prin urmare $t \in \left(-\infty, 14\frac{2}{3}\right) \cap \left[12\frac{2}{3}, +\infty\right) = \left[12\frac{2}{3}, 14\frac{2}{3}\right)$.

Dar $t \in Z \Rightarrow t_1 = 13$ și $t_2 = 14$. Din $x = \frac{t-1}{2}$, pentru $t_1 = 13$, $x_1 = 6$, iar pentru $t_2 = 14$, $x_2 = 6\frac{1}{2}$.

III. 9. Să se arate că oricare ar fi $m \in Z \setminus \{0\}$ mulțimea soluțiilor ecuației

$$\left[\frac{m^2x-1}{2}\right] = \frac{2x+1}{5}$$

are numai patru elemente ($[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a).

Rezolvare. Dacă $t \in Z$, atunci $\frac{2x+1}{5} = t \Rightarrow x = \frac{5t-1}{2}$ și ecuația dată se scrie

$$\left[\frac{5m^2t-m^2-2}{4}\right] = t \text{ sau } t \leq \frac{5m^2t-m^2-2}{4} < t+1.$$

Pentru $m \in Z \setminus \{0\}$, din $t \leq \frac{5m^2t-m^2-2}{4}$ se obține $\frac{m^2+2}{5m^2-4} \leq t$, iar din $\frac{5m^2t-m^2-2}{4} < t+1$ se obține $t < \frac{m^2+6}{5m^2-4}$. Deci pentru $m \in Z \setminus \{0\}$,

$$\frac{m^2+2}{5m^2-4} \leq t < \frac{m^2+6}{5m^2-4}.$$

Cum m este întreg, $m^2 = 1, 4, 9, 16, \dots$. Pentru $m^2 = 1$ se obține $3 \leq t < 7$ și deoarece t este întreg rezultă $t_1 = 3, t_2 = 4, t_3 = 5, t_4 = 6$. Pentru aceste valori ale lui t se obține (din $x = \frac{5t-1}{2}$):

$$x_1 = 7, x_2 = 9\frac{1}{2}, x_3 = 12, x_4 = 14\frac{1}{2}.$$

Pentru $m^2 = 4, 9, 16, \dots$, $0 < \frac{m^2+2}{5m^2-4} < 1$ și $0 < \frac{m^2+6}{5m^2-4} < 1$; deci nu există soluție întreagă pentru t . Mulțimea soluțiilor ecuației date este $\left\{7, 9\frac{1}{2}, 12, 14\frac{1}{2}\right\}$ pentru orice $m \in Z \setminus \{0\}$. Pentru $m = 0$, ecuația admite rădăcina $x = -3$.

III. 10. Folosind semnul funcției de gradul întâi, să se rezolve următoarele inecuații:

$$\frac{|x+2|(4-x)}{(x+3)(2-x)} \geq 0. \quad (1)$$

$$\frac{|x-2|}{(x+2)(5-x)} \leq \frac{2}{x+2}. \quad (2)$$

Rezolvare. Pentru inecuația (1) rezultă următorul tablou de variații

x	$-\infty$	-3	-2	2	4	$+\infty$
$ x+2 $	+	+	+	0	+	+
$4-x$	+	+		+	+	0
$x+3$	-	-	-	0	+	+
$2-x$	+	+	+	+	0	-
$\frac{ x+2 (4-x)}{(x+3)(2-x)}$	-	-	-	+	+	0

Din tabloul de variație rezultă că inecuația (1) are loc pentru $x \in (-3, 2) \cup [4, +\infty)$.

Inecuația (2) se scrie:

$$\frac{|x-2|-2(5-x)}{(x+2)(5-x)} \leq 0;$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{pentru } x \in (2, +\infty), \\ 0 & \text{pentru } x = 2, \\ -(x-2) & \text{pentru } x \in (-\infty, 2). \end{cases}$$

a) Pentru $x \in (2, +\infty)$, inecuația devine

$$\frac{3x-12}{(x+2)(5-x)} \leq 0.$$

x	$-\infty$	-2	4	5	$+\infty$
$3(x-4)$	-	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+	+
$5-x$	+	+	+	+	0
$\frac{3(x-4)}{(2+2)(5-x)}$	+	-	0	+	-

$$x \in \{(-2, 4] \cup (5, +\infty)\} \cap (2, +\infty) = (2, 4] \cup (5, +\infty).$$

b) Pentru $x = 2$, inecuația este satisfăcută.

c) Pentru $x \in (-\infty, 2)$, inecuația se scrie

$$\frac{x-8}{(x+2)(5-x)} \leq 0.$$

x	$-\infty$	-2	5	8	$+\infty$
$x-8$	-	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+	+
$5-x$	+	+	+	0	-
$\frac{x-8}{(x+2)(5-x)}$	+	-	+	0	-

$$x \in \{(-2, 5) \cup [8, +\infty)\} \cap (-\infty, 2) = (-2, 2).$$

Deci inecuația (2) are loc pentru $x \in (-2, 4] \cup (5, +\infty)$.

III. 11. Să se determine valorile reale ale lui x pentru care următoarele inecuații au loc simultan:

$$\begin{cases} |2-x| > \frac{x-2}{x+1}, \\ \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+x} \leq \frac{|x+3|}{x^2-1} \end{cases}$$

Rezolvare. Se consideră prima inecuație:

$$|2-x| = \begin{cases} 2-x & \text{pentru } x \in (-\infty, 2), \\ 0 & \text{pentru } x = 2, \\ -(2-x) & \text{pentru } x \in (2, +\infty). \end{cases}$$

a) $x \in (-\infty, 2)$

$$2-x > \frac{x-2}{x+1} \Rightarrow \frac{(x-2)(x+2)}{x+1} < 0;$$

x	$-\infty$	-2	-1	2	$+\infty$
$x-2$	-	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+	+
$x+1$	-	-	0	+	+
$\frac{(x-2)(x+2)}{x+1}$	-	0	+	-	0

$$x \in \{(-\infty, -2) \cup (-1, 2)\} \cap (-\infty, 2) = (-\infty, -2) \cup (-1, 2)$$

b) $x = 2 \Rightarrow$ inecuația nu are loc.

c) $x \in (2, +\infty)$

$$-(2-x) > \frac{x-2}{x+1} \Rightarrow \frac{(x-2)x}{x+1} > 0:$$

x	$-\infty$	$-$	$-$	-1	$-$	0	$+$	2	$+$	$+$	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{x(x-2)}{x+1}$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$

$$x \in \{(-1, 0) \cup (2, +\infty)\} \cap (2, +\infty) = (2, +\infty).$$

Deci prima inecuație are loc pentru $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$. Din inecuația a doua dată rezultă:

d) $x \in (-3, +\infty)$.

$$\frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+x} \leq \frac{x+3}{x^2-1} \Rightarrow \frac{6}{x^2-1} \geq 0 \Rightarrow x \in \{(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)\} \cap$$

$$\cap (-3, +\infty) = (-3, -1) \cup (1, +\infty).$$

e) $x = -3 \Rightarrow$ inecuația are loc.

f) $x \in (-\infty, -3)$.

$$\frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+x} \leq -\frac{x+3}{x^2-1} \Rightarrow \frac{2x}{x^2-1} \leq 0 \Rightarrow x = 0, x^2-1=0 \Rightarrow x = \pm 1.$$

x	$-\infty$	$-$	-1	$-$	0	$+$	1	$+$	$+$	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{2x}{x^2-1}$	$-$	$-$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$

$$x \in \{(-\infty, -1) \cup [0, 1)\} \cap (-\infty, -3) = (-\infty, -3).$$

Rezultă că inecuația a doua are loc pentru $x \in (-\infty, -3) \cup \{-3\} \cup (-3, -1) \cup (1, +\infty) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, iar cele două inecuații au loc simultan pentru $x \in \{(-\infty, -2) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)\} \cap \{(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)\} = (-\infty, -2) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$.

III. 12. Se dă sistemul de inecuații:

$$2x + y < 5 \quad (a) \quad x - y < 1. \quad (b)$$

$$x + 2y < 7 \quad (c) \quad x + 3 > 0. \quad (d)$$

Să se pună în evidență domeniul D în care acest sistem este satisfăcut.

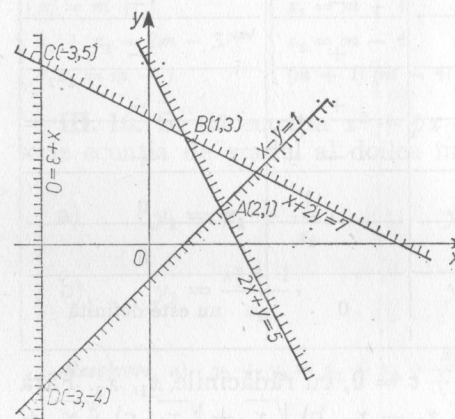


Fig. III. 12

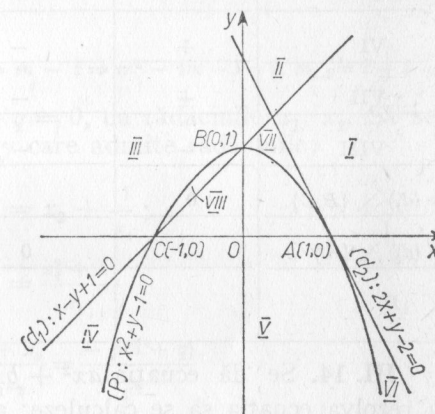


Fig. III. 13

Rezolvare. Orice dreaptă $Ax + By + C = 0$, împarte planul care o conține în trei regiuni: regiunea R în care punctele (x, y) verifică inecuația $Ax + By + C > 0$; regiunea R' în care punctele (x, y) verifică inecuația $Ax + By + C < 0$ și dreapta (d) pentru care punctele (x, y) verifică ecuația $Ax + By + C = 0$. Prin urmare, pentru rezolvarea sistemului de inecuații se reprezintă în planul xOy dreptele $2x + y = 5$, $x + 2y = 7$, $x - y = 1$, $x + 3 = 0$ (fig. III.12) și se determină regiunea în care este satisfăcută fiecare inecuație (partea nehașurată pe figură). Din fig. III.12 se observă că domeniul D în care este satisfăcut sistemul de inecuații este regiunea $D = a \cap b \cap c \cap d$, adică interiorul patrulaterului $ABCD$ (exclusiv laturile).

III. 13. Să se împartă planul xOy în regiuni, după semnul expresiei

$$\frac{(x - y + 1)(2x + y - 2)}{x^2 + y - 1}.$$

Rezolvare. Se reprezintă grafic curbele de ecuații:

$$x - y + 1 = 0, 2x + y - 2 = 0, x^2 + y - 1 = 0 \text{ (fig. III.13).}$$

Regiunea	$x - y + 1$	$2x + y - 2$	$x^2 + y - 1$	$\frac{(x - y + 1)(2x + y - 2)}{x^2 + y - 1}$
I	+	+	+	+
II	-	+	+	-
III	-	-	+	+
IV	+	-	+	-
V	+	-	-	+
VI	+	-	+	-
VII	+	-	+	-
VIII	-	-	-	-
$(d_1) \setminus \{B, C\}$	0			0
$(d_2) \setminus \{A\}$		0		0
(P)			0	nu este definită

III. 14. Se dă ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, cu rădăcinile x_1, x_2 . Fără a rezolva ecuația să se calculeze: a) $x_1 - x_2$, b) $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$, c) $\sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2}$, d) $\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} - \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}$.

Rezolvare. a) Din $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ și $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ se deduce $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2} \Rightarrow x_1 - x_2 = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$ (+, dacă $x_1 > x_2$; -, dacă $x_1 < x_2$).

$$\text{b) } \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2} = \sqrt{x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2}} = \sqrt{-\frac{b}{a} + 2\sqrt{\frac{c}{a}}}.$$

$$\text{c) } \sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2} = \sqrt[4]{(\sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2})^4} = \sqrt[4]{x_1 + x_2 + 4\sqrt{x_1 x_2}(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) + 6\sqrt{x_1 x_2}} = \sqrt[4]{-\frac{b}{a} + 4\sqrt{\frac{c}{a}} \cdot \sqrt{-\frac{b}{a} + 2\sqrt{\frac{c}{a}}} + 6\sqrt{\frac{c}{a}}}.$$

$$\text{d) } \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} - \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1 x_2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \cdot \sqrt{\frac{a}{c}} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{ac}}$$

III. 15. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile x_1, x_2 ale ecuației

$$x^2 - (2m - 3)x + m - 1 = 0$$

să satisfacă relația $3x_1 - 5x_1 x_2 + 2x_2 = 0$.

Rezolvare. Se scrie sistemul

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_1 x_2 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 2m - 3 \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2(2m - 3) - 5(m - 1) = 0 \\ x_1 + x_2 = 2m - 3 \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = m + 1 \\ x_1 + x_2 = 2m - 3 \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m + 1 \\ x_2 = m - 4 \\ (m + 1)(m - 4) = m - 1 \Rightarrow m^2 - 4m - 3 = 0, m_{1,2} = 2 \pm \sqrt{7}. \end{cases}$$

III. 16. Se dă ecuația $x^2 + px + q = 0$, cu rădăcinile x_1, x_2 . Să se scrie ecuația de gradul al doilea în y care admite rădăcinile:

$$\text{a) } y_1 = x_1 + \frac{1}{x_2}, \quad y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1};$$

$$\text{b) } y_1 = \frac{x_1^2 + 1}{x_2}, \quad y_2 = \frac{x_2^2 + 1}{x_1}.$$

$$\text{Rezolvare. a) } y_1 + y_2 = x_1 + x_2 + \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{p(1 + q)}{q}$$

$$y_1 y_2 = x_1 x_2 + 2 + \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{(1 + q)^2}{q}.$$

$$qy^2 + p(1 + q)y + (1 + q)^2 = 0.$$

$$\text{b) } y_1 + y_2 = \frac{x_1^3 + x_2^3 + x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 + 1]}{x_1 x_2} =$$

$$= \frac{-p(p^2 - 3q + 1)}{q}, \quad y_1 y_2 = \frac{x_1^2 x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + 1}{x_1 x_2} = \frac{p^2 + (q - 1)^2}{q}$$

$$qy^2 + p(p^2 - 3q + 1)y + p^2 + (q - 1)^2 = 0.$$

Observație. În cazul a) se obțin: $y_1 = \frac{1 + q}{x_2}$, $y_2 = \frac{1 + q}{x_1}$, adică, în general, $y = \frac{1 + q}{x}$. Înlocuind $x = \frac{1 + q}{y}$ în ecuația dată, se obține ecuația cerută în y .

III. 17. Să se determine m și n astfel ca ecuațiile

$$(2m - 1)x^2 + (5 + m + n)x + 3 = 0,$$

$$2(n + 3)x^2 - (2m - n + 4)x - 6 = 0$$

să aibă aceleași rădăcini.

Rezolvare. Două ecuații de același grad au aceleași rădăcini dacă ecuațiile au coeficienții termenilor de același grad proporționali:

$$\frac{2m - 1}{2(n + 3)} = \frac{5 + m + n}{-(2m - n + 4)} = \frac{3}{-6}$$

de unde se obține sistemul

$$\begin{cases} \frac{2m - 1}{2(n + 3)} = -\frac{1}{2} \\ \frac{5 + m + n}{2m - n + 4} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + n = -2 \\ 3n = -6 \end{cases} \Rightarrow n = -2, m = 0,$$

Ecuațiile sînt $-x^2 + 3x + 3 = 0$, $2x^2 - 6x - 6 = 0$, cu rădăcinile $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$.

III. 18. Să se determine parametrul $m \in R$ astfel ca ecuațiile:

$$P(x) = (m - 1)x^2 - (m - 2)x - 3m = 0,$$

$$Q(x) = mx^2 - (m + 2)x + 3m + 2 = 0,$$

să admită o rădăcină comună. Să se rezolve apoi ecuațiile.

Rezolvare. Dacă ecuațiile $P(x) = 0$ și $Q(x) = 0$ admit o rădăcină comună x_1 atunci și ecuația $\alpha P(x) + \beta Q(x) = 0$, $\alpha, \beta \in R$, admite pe x_1 ca rădăcină. Luînd $\alpha = m$ și $\beta = -(m - 1)$ se obține ecuația $(3m - 2)x - 6m^2 + m + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2m + 1$ (rădăcină comună). Înlocuind $x_1 = 2m + 1$ în ecuațiile date se obține sistemul în m :

$$\begin{cases} 4m^3 - 2m^2 - 3m + 1 = 0 \\ 4m^3 + 2m^2 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m - 1)(4m^2 + 2m - 1) = 0 \\ m(4m^2 + 2m - 1) = 0 \end{cases}$$

cu soluția $m_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$.

Pentru $m_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ ecuațiile $P(x) = 0$, $Q(x) = 0$ devin

$$P(x) = (-5 + \sqrt{5})x^2 - (-9 + \sqrt{5})x - 3(-1 + \sqrt{5}) = 0$$

cu rădăcinile

$$x_{1,2} = \frac{-9 + \sqrt{5} \pm \sqrt{206 - 90\sqrt{5}}}{2(-5 + \sqrt{5})} = \frac{-9 + \sqrt{5} \pm \left(\sqrt{\frac{206 + 44}{2}} - \sqrt{\frac{206 - 44}{2}}\right)}{2(-5 + \sqrt{5})},$$

adică

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{3(5 - \sqrt{5})}{10},$$

$$Q(x) = (-1 + \sqrt{5})x^2 - (7 + \sqrt{5})x + 5 + 3\sqrt{5} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{2}.$$

Pentru $m_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$ ecuațiile $P(x) = 0$, $Q(x) = 0$ au rădăcinile

$$P(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{3(5 + \sqrt{5})}{10}; \quad Q(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

$$x_2 = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{2}.$$

III. 19. Să se rezolve în mulțimea R ecuația

$$|x^2 - 2x - 3| + 2|x - 5| = 3x^2 + 1.$$

Rezolvare.

$$|x^2 - 2x - 3| = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & \text{pentru } x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty), \\ 0 & \text{pentru } x = -1, x = 3, \\ -(x^2 - 2x - 3) & \text{pentru } x \in (-1, 3). \end{cases}$$

$$|x - 5| = \begin{cases} x - 5 & \text{pentru } x \in (5, +\infty), \\ 0 & \text{pentru } x = 5, \\ -(x - 5) & \text{pentru } x \in (-\infty, 5). \end{cases}$$

a) $x \in (-\infty, -1)$.

$$x^2 - 2x - 3 - 2(x - 5) = 3x^2 + 1 \Rightarrow x_1 = -3 \in (-\infty, -1), x_2 = 1 \notin (-\infty, -1).$$

b) $x = -1 \Rightarrow 12 = 4$ ecuație imposibilă.

c) $x \in (-1, 3)$.

$$-(x^2 - 2x - 3) - 2(x - 5) = 3x^2 + 1 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3} \notin (-1, 3), x_2 = \sqrt{3} \in (-1, 3).$$

d) $x = 3 \Rightarrow 4 = 28$ ecuație imposibilă.

e) $x \in (3, 5)$.

$$x^2 - 2x - 3 - 2(x - 5) = 3x^2 + 1 \Rightarrow x_1 = -3 \notin (3, 5), x_2 = 1 \notin (3, 5).$$

f) $x = 5 \Rightarrow 12 = 76$ ecuație imposibilă

g) $x \in (5, +\infty)$.

$$x^2 - 2x - 3 + 2(x - 5) = 3x^2 + 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm i\sqrt{7} \notin R.$$

Deci rădăcinile ecuației date sînt $x = -3$ și $x = \sqrt{3}$.

III. 20. Să se rezolve în mulțimea R inecuația

$$|x^2 - 3x + 2| < |x + 2|.$$

Rezolvare.

$$|x^2 - 3x + 2| = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{dacă } x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty), \\ 0 & \text{dacă } x = 1 \text{ sau } x = 2, \\ -(x^2 - 3x + 2) & \text{dacă } x \in (1, 2). \end{cases}$$

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{dacă } x \in (-2, +\infty), \\ 0 & \text{dacă } x = -2, \\ -(x + 2) & \text{dacă } x \in (-\infty, -2). \end{cases}$$

Mulțimea R în care se rezolvă inecuația se împarte în submulțimile $(-\infty, -2)$, $\{-2\}$, $(-2, 1)$, $\{1\}$, $(1, 2)$, $\{2\}$, $(2, +\infty)$:

a) $x \in (-\infty, -2)$: $x^2 - 3x + 2 < -x - 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 4 < 0 \Rightarrow \Delta' = -3 < 0$ și coeficientul lui x^2 pozitiv $\Rightarrow x \in \emptyset$.

b) $x = -2$: $12 < 0$ imposibil;

c) $x \in (-2, 1)$: $x^2 - 3x + 2 < x + 2 \Rightarrow x^2 - 4x < 0 \Rightarrow x \in (0, 4) \cap (-2, 1) = (0, 1)$.

d) $x = 1$: $0 < 3 \Rightarrow x = 1$ satisface inecuația.

e) $x \in (1, 2)$: $-(x^2 - 3x + 2) < x + 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 4 > 0 \Rightarrow \Delta' = -3 < 0$ și coeficientul lui x^2 pozitiv $\Rightarrow x \in R \cap (1, 2) = (1, 2)$.

f) $x = 2$: $0 < 4 \Rightarrow x = 2$ satisface inecuația.

g) $x \in (2, +\infty)$: $x^2 - 3x + 2 < x + 2 \Rightarrow x^2 - 4x < 0 \Rightarrow x \in (0, 4) \cap (2, +\infty) = (2, 4)$.

În concluzie, inecuația dată are loc pentru $x \in (0, 1) \cup \{1\} \cup (1, 2) \cup \{2\} \cup (2, 4) = (0, 4)$.

III.21. Să se determine valorile parametrului $m \in R$ pentru care trinomialul

$$(m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + 5m - 6$$

este pozitiv oricare ar fi $x \in R$.

Rezolvare. Trinomialul este pozitiv pentru orice $x \in R$, dacă

$$\begin{cases} m - 2 > 0, \\ \Delta = -m^2 + 4m - 3 \leq 0. \end{cases}$$

Rezolvând aceste inecuații se obține

$$m \in (2, +\infty) \cap \{(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)\} = [3, +\infty),$$

adică pentru $m \in [3, +\infty)$ trinomialul este pozitiv oricare ar fi $x \in R$.

III. 22. Să se discute natura și semnul rădăcinilor ecuației

$$(2m + 1)x^2 + 3(m + 1)x + m + 3 = 0,$$

după valorile parametrului real m .

Rezolvare. $\Delta = 9(m + 1)^2 - 4(2m + 1)(m + 3) = m^2 - 10m - 3$; $\Delta = 0 \Rightarrow m_1 = 5 - 2\sqrt{7}$, $m_2 = 5 + 2\sqrt{7}$.

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{3(m + 1)}{2m + 1} = -\frac{3(m + 1)(2m + 1)}{(2m + 1)^2} \Rightarrow (m + 1)(2m + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 = -1, m_2 = -\frac{1}{2},$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{m + 3}{2m + 1} = \frac{(m + 3)(2m + 1)}{(2m + 1)^2} \Rightarrow (m + 3)(2m + 1) = 0 \Rightarrow m_1 = -3,$$

$$m_2 = -\frac{1}{2}.$$

Se întocmește următorul tabel de discuție al rădăcinilor:

m	Δ	P	S	Concluzii
$m \in (-\infty, -3)$	+	+	-	rădăcini reale, $x_1 \neq x_2 < 0$
$m = -3$	+	0	-	rădăcini reale, $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{6}{5}$
$m \in (-3, -1)$	+	-	-	rădăcini reale, $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $x_1 < x_2 $
$m = -1$	+	-	0	rădăcini reale, $x_1 = -x_2$
$m \in (-1, -\frac{1}{2})$	+	-	+	rădăcini reale, $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $x_1 > x_2 $
$m = -\frac{1}{2}$	+			rădăcinile ec. de gr. întâi: $3x + 5 = 0$, $x = -\frac{5}{3}$
$m \in (-\frac{1}{2}, 5 - 2\sqrt{7})$	+	+	-	rădăcini reale, $x_1 \neq x_2 < 0$
$m = 5 - 2\sqrt{7}$	0	+	-	rădăcini reale, $x_1 = x_2 < 0$
$m \in (5 - 2\sqrt{7}, 5 + 2\sqrt{7})$	-	+	-	rădăcini complexe
$m = 5 + 2\sqrt{7}$	0	+	-	rădăcini reale, $x_1 = x_2 < 0$
$m \in (5 + 2\sqrt{7}, +\infty)$	+	+	-	rădăcini reale, $x_1 \neq x_2 < 0$

III. 23. Să se discute natura rădăcinilor ecuației

$$(m-1)x^2 + 2(m+n-1)x + m + 2n - 4 = 0,$$

m și n fiind doi parametri reali. Să se împartă planul nOm în regiuni după natura rădăcinilor.

Rezolvare. a) $\Delta = n^2 + 3m - 3$, $\Delta = 0 \Rightarrow n^2 = 3(1-m) \Rightarrow n = \pm \sqrt{3(1-m)}$,

$$P = \frac{m+2n-4}{m-1}, m+2n-4=0 \Rightarrow n = 2 - \frac{m}{2}, m-1=0 \Rightarrow m=1,$$

$$S = -\frac{2(m+n-1)}{m-1}, m+n-1=0 \Rightarrow n = 1-m, m-1=0 \Rightarrow m=1.$$

$$\sqrt{3(1-m)} < 2 - \frac{m}{2}, \text{ pentru } m \in (-\infty, 1];$$

$\sqrt{3(1-m)} < 1-m$, pentru $m \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ și $\sqrt{3(1-m)} > 1-m$, pentru $m \in (-2, 1)$; $2 - \frac{m}{2} < 1-m$, pentru $m \in (-\infty, -2)$ și $2 - \frac{m}{2} > 1-m$, pentru $m \in (-2, +\infty)$.

Tabelul de discuție al rădăcinilor este:

m	n	Δ	P	S	Concluzii
$m \in (-\infty, -2)$	$n \in (-\infty, -\sqrt{3(1-m)})$	+	+	-	două răd. reale, $x_1 < x_2 < 0$
	$n = -\sqrt{3(1-m)}$	0	+	-	două răd. reale, $x_1 = x_2 < 0$
	$n \in (-\sqrt{3(1-m)}, \sqrt{3(1-m)})$	-	+	-	două răd. complexe
	$n = \sqrt{3(1-m)}$	0	+	-	două răd. reale, $x_1 = x_2 < 0$
	$n \in (\sqrt{3(1-m)}, 2 - \frac{m}{2})$	+	+	-	două răd. reale, $x_1 < x_2 < 0$
	$n = 2 - \frac{m}{2}$	+	0	-	două răd. reale, $x_1 = 0$, $x_2 < 0$
	$n \in (2 - \frac{m}{2}, 1-m)$	+	-	-	două răd. reale, $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $ x_1 > x_2$
	$n = 1-m$	+	-	0	două răd. reale, $x_1 = -x_2$
	$n \in (1-m, +\infty)$	+	-	+	două răd. reale, $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $ x_1 < x_2$

m	n	Δ	P	S	Concluzii
$m = -2$	$n \in (-\infty, -3)$	+	+	-	două răd. reale, $x_1 < x_2 < 0$
	$n = -3$	0	+	-	două răd. reale, $x_1 = x_2 < 0$
	$n \in (-3, 3)$	-	+	-	două răd. complexe
	$n = 3$	0	0	0	$x_1 = x_2 = 0$
	$n \in (3, +\infty)$	+	-	+	două răd. reale, $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $ x_1 < x_2$
$m \in (-2, 1)$	$n \in (-\infty, -\sqrt{3(1-m)})$	+	+	-	două răd. reale, $x_1 < x_2 < 0$
	$n = -\sqrt{3(1-m)}$	0	+	-	două răd. reale, $x_1 = x_2 < 0$
	$n \in (-\sqrt{3(1-m)}, 1-m)$	-	+	-	două răd. complexe
	$n = 1-m$	-	+	0	două răd. imaginare $x_1 = -x_2$
	$n \in (1-m, \sqrt{3(1-m)})$	-	+	+	două răd. complexe
	$n = \sqrt{3(1-m)}$	0	+	+	două răd. reale, $x_1 = x_2 > 0$
	$n \in (\sqrt{3(1-m)}, 2 - \frac{m}{2})$	+	+	+	două răd. reale, $x_1 > x_2 > 0$
	$n = 2 - \frac{m}{2}$	+	0	0	două răd. reale, $x_1 = 0$, $x_2 > 0$
	$n \in (2 - \frac{m}{2}, +\infty)$	+	-	+	două răd. reale, $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $ x_1 < x_2$
$m = 1$	$n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	+			ec. de gr. întâi, $x = \frac{3-2n}{2n}$
	$n = 0$	0			ec. imposibilă

m	n	Δ	P	S	Concluzii
$m \in (1, +\infty)$	$n \in (-\infty, 1-m)$	+	-	+	două răd. reale, $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $ x_1 < x_2$
	$n = 1-m$	+	-	0	două răd. reale, $x_1 = -x_2$
	$n \in \left(1-m, 2-\frac{m}{2}\right)$	+	-	-	două răd. reale, $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $ x_1 > x_2$
	$n = 2-\frac{m}{2}$	+	0	-	două răd. reale, $x_1 < 0$, $x_2 = 0$
	$n \in \left(2-\frac{m}{2}, +\infty\right)$	+	+	-	două răd. reale, $x_1 < x_2 < 0$

b) Pentru a împărți planul nOm în regiuni după natura rădăcinilor se reprezintă grafic funcțiile:

$$(P): m = \frac{3-n^2}{3}, \quad (d_1): m = 4-2n, \quad (d_2): m = 1-n, \quad (d_3): m = 1 (\Delta = 0,$$

$P = 0, S = 0$, numitorul produsului și sumei egal cu zero).

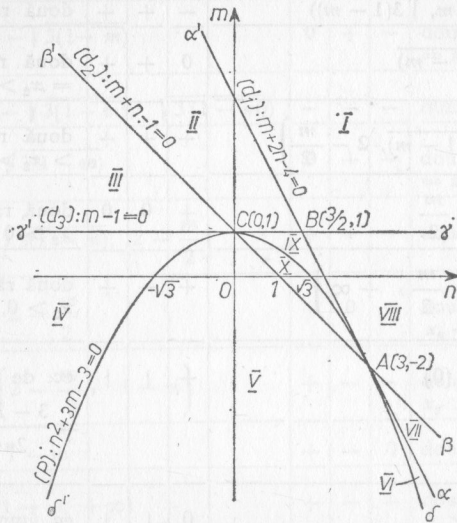


Fig. III. 23

Se obține tabelul:

Regiunea	Δ	P	S	Natura rădăcinilor
I	+	+	-	două răd. reale, $x_1 < x_2 < 0$
$(B\alpha') \subset (d_1)$	+	0	-	două răd. reale, $x_1 = 0, x_2 < 0$
II	+	-	-	două răd. reale, $x_1 > 0, x_2 < 0, x_1 < x_2 $
$(C\beta') \subset (d_2)$	+	-	0	două răd. reale, $x_1 = -x_2$
III	+	-	+	două răd. reale, $x_1 > 0, x_2 < 0, x_1 > x_2 $
$(d_3) \setminus \{C\}$				răd ec. gr. I: $2nx + 2n - 3 = 0$
IV	+	+	-	două răd. reale, $x_1 < x_2 < 0$
$(C\delta') \subset (P)$	0	+	-	două răd. reale, $x_1 = x_2 < 0$
V	-	+	-	două răd. complexe
$(A\delta) \subset (P)$	0	+	-	două răd. reale, $x_1 = x_2 < 0$
VI	+	+	-	două răd. reale, $x_1 < x_2 < 0$
$(A\alpha) \subset (d_1)$	+	0	-	două răd. reale, $x_1 = 0, x_2 < 0$
VII	+	-	-	două răd. reale, $x_1 > 0, x_2 < 0, x_1 < x_2 $
$(A\beta) \subset (d_2)$	+	-	0	două răd. reale, $x_1 = -x_2$
VIII	+	-	+	două răd. reale, $x_1 > 0, x_2 < 0, x_1 > x_2 $
$(AB) \subset (d_1)$	+	0	+	două răd. reale, $x_1 = 0, x_2 > 0$
IX	+	+	+	două răd. reale, $x_1 > x_2 > 0$
$(AC) \subset (P)$	0	+	+	două răd. reale, $x_1 = x_2 > 0$
X	-	+	+	două răd. complexe
$(AC) \subset (d_2)$	-	+	0	două răd. imaginare
$C(0,1)$	0			ecuația este imposibilă
$A(3,-2)$	0	0	0	două răd. reale, $x_1 = x_2 = 0$

III. 24. Se dă ecuația

$$2x^2 - (3m - 1)x + m^2 - m = 0$$

cu rădăcinile x_1, x_2 și m un parametru real. Să se afle valorile lui m pentru care $x_1^2 + x_2^2 \geq 1$ și $-1 < 2x_1x_2 < 1$.

Rezolvare. $x_1 + x_2 = \frac{3m-1}{2}$, $x_1x_2 = \frac{m^2-m}{2}$. Dar $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$; deci $\left(\frac{3m-1}{2}\right)^2 - 2\frac{m^2-m}{2} \geq 1 \Rightarrow 5m^2 - 2m - 3 \geq 0$.

Rezultă că mulțimea valorilor lui m pentru care rădăcinile ecuației date satisfac condiția $x_1^2 + x_2^2 \geq 1$ este $m \in \left(-\infty, -\frac{3}{5}\right] \cup [1, +\infty)$.

Condiția $-1 < 2x_1x_2 < 1$ sau $-1 < m^2 - m < 1$ este echivalentă cu sistemul de inecuații:

$$\begin{cases} m^2 - m + 1 > 0 \Rightarrow m \in \mathbb{R}, (\Delta = -3 < 0), \\ m^2 - m - 1 < 0 \Rightarrow m \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \end{cases}$$

adică $-1 < 2x_1x_2 < 1$ are loc pentru $m \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Cele două condiții au loc simultan pentru

$$\begin{aligned} m \in \left\{ \left(-\infty, -\frac{3}{5}\right] \cup [1, +\infty) \right\} \cap \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow m \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, -\frac{3}{5}\right] \cup \left[1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}$$

III. 25. Se dă ecuația

$$(2m-1)x^2 + 2(m+1)x - m - 1 = 0. \quad (1)$$

Să se determine parametrul real m astfel ca rădăcinile x_1, x_2 ale ecuației (1) să satisfacă condițiile:

- a) x_1 și x_2 mai mici ca 1; b) $x_1 < 1 < x_2$;
c) $x_1 < 1 < 2 < x_2$; d) $1 < x_1 < 2 < x_2$.

Rezolvare. Ecuația dată trebuie să admită rădăcini reale, adică $\Delta_x \geq 0$. Dar $\Delta_x = 3m^2 + 3m \geq 0$ pentru $m \in (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$.

a) Se face transformarea

$$y = x - 1. \quad (2)$$

Atunci $y_1 = x_1 - 1 < 0$, $y_2 = x_2 - 1 < 0$.

Din (2) se scoate $x = y + 1$ care introdus în (1) dă

$$(2m-1)y^2 + 6my + 3m = 0. \quad (3)$$

Ecuația (3) trebuie să admită rădăcini reale, negative, adică trebuie ca

$$\Delta_y = 3m^2 + 3m \geq 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -1] \cup [0, +\infty),$$

$$P_y = \frac{3m}{2m-1} > 0 \Rightarrow \frac{3m(2m-1)}{(2m-1)^2} > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right),$$

$$S_y = -\frac{6m}{2m-1} < 0 \Rightarrow \frac{6m(2m-1)}{(2m-1)^2} > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

Cele trei inecuații au loc simultan pentru

$$\begin{aligned} m \in \{(-\infty, -1] \cap [0, +\infty)\} \cup \left\{(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)\right\} \cap \\ \cap \left\{(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)\right\}, \end{aligned}$$

adică pentru $m \in (-\infty, -1] \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ rădăcinile ecuației (3) sînt negative și rădăcinile ecuației (1) sînt mai mici ca 1.

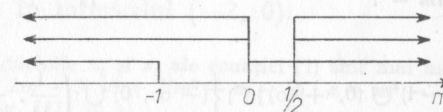


Fig. III. 25. a

b) Făcînd transformarea $y = x - 1$ și înlocuind $x = y + 1$ în (1) se obține ecuația (3) care trebuie să aibă rădăcinile

$$y_2 = x_1 - 1 > 0, \quad y_2 = x_2 - 1 > 0.$$

adică

$$\Delta_y = 3m^2 + 3m > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty),$$

$$P_y = \frac{3m}{2m-1} < 0 \Rightarrow m \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Rezultă

$$m \in \{(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)\} \cap \left(0, \frac{1}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

și deci pentru $m \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, ecuația (3) are rădăcini de semne contrare și ecuația (1) are rădăcinile $x_1 < 1 < x_2$.

c) Se face transformarea

$$y = \frac{x-1}{x-2}. \quad (4)$$

Se obține

$$y_1 = \frac{x_1-1}{x_1-2} > 0, \quad y_2 = \frac{x_2-1}{x_2-2} > 0, \quad y_1 \neq y_2$$

Din (4) se scoate $x = \frac{2y-1}{y-1}$, care înlocuit în (1) dă ecuația

$$(11m-1)y^2 - 12my + 3m = 0, \quad (5)$$

care trebuie să admită rădăcini reale diferite strict pozitive, adică:

$$\Delta_y = 3m^2 + 3m > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty),$$

$$P_y = \frac{3m}{11m-1} > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{11}, +\infty\right),$$

$$S_y = \frac{12m}{11m-1} > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{11}, +\infty\right),$$

de unde

$$m \in \{(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)\} \cap \left\{(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{11}, +\infty\right)\right\} \cap \left\{(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{11}, +\infty\right)\right\}.$$

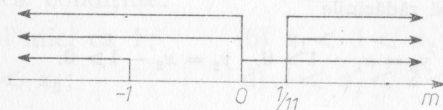


Fig. III. 25. c

sau $m \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{11}, +\infty\right)$. Pentru aceste valori ale parametrului m se obține $x_1 < 1 < 2 < x_2$.

d) Din transformarea (4) rezultă

$$y_1 = \frac{x_1-1}{x_1-2} < 0, \quad y_2 = \frac{x_2-1}{x_2-2} > 0$$

și ecuația (5) admite rădăcini reale de semne contrare $y_1 < 0, y_2 > 0$, dacă

$$\Delta_y = 3m^2 + 3m > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty),$$

$$P_y = \frac{3m}{11m-1} < 0 \Rightarrow m \in \left(0, \frac{1}{11}\right),$$

adică

$$m \in \{(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)\} \cap \left(0, \frac{1}{11}\right) = \left(0, \frac{1}{11}\right)$$

Deci ecuația (1) admite rădăcinile $1 < x_1 < 2 < x_2$ pentru $m \in \left(0, \frac{1}{11}\right)$.

III. 26. Se dă ecuația

$$(m^2 - 2m - 3)x^2 + 2(m^2 - m - 2)x + m^2 - 2 = 0. \quad (1)$$

Să se determine parametrul real m astfel ca rădăcinile x_1, x_2 ale ecuației (1) să satisfacă condițiile:

- x_1 și x_2 mai mari ca -2 ;
- $x_1 < -2 < x_2$;
- ambele rădăcini să aparțină intervalului $(-2, 0)$;
- o rădăcină în intervalul $(-2, 0)$.

Rezolvare. a) Rădăcinile x_1 și x_2 ale ecuației (1) sînt mai mari ca -2 dacă graficul funcției $f(x) = (m^2 - 2m - 3)x^2 + 2(m^2 - m - 2)x + m^2 - 2$ taie axa Ox la dreapta punctului $(-2, 0)$ (fig. III. 26 a)

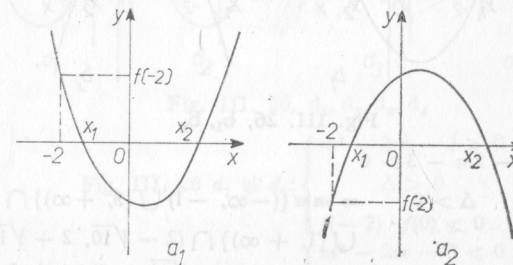


Fig. III. 26 a₁ a₂

Fig. III. 26 a_1 are loc dacă:

- graficul are un minim $\Rightarrow m^2 - 2m - 3 > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$,
- graficul taie axa $Ox \Rightarrow \Delta = 2(m^2 - 1) \geq 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$,
- $f(-2) > 0 \Rightarrow m^2 - 4m - 6 > 0, m \in (-\infty, 2 - \sqrt{10}) \cup (2 + \sqrt{10}, +\infty)$.
- minimul se află la dreapta punctului $(-2, 0) \Rightarrow$

$$-\frac{m^2 - m - 2}{m^2 - 2m - 3} > -2 \Rightarrow 2 - \frac{(m+1)(m-2)}{(m+1)(m-3)} > 0 \Rightarrow \frac{m-4}{m-3} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \in (-\infty, 3) \cup (4, +\infty).$$

Luind intersecția acestor intervale se obține $m \in \{(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)\} \cap \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\} \cap \{(-\infty, 2 - \sqrt{10}) \cup (2 + \sqrt{10}, +\infty)\} \cap \{(-\infty, 3) \cup (4, +\infty)\} = (-\infty, 2 - \sqrt{10}) \cup (2 + \sqrt{10}, +\infty)$.

Fig. III. 26 a_2 are loc dacă:

- graficul are un maxim $\Rightarrow m^2 - 2m - 3 < 0 \Rightarrow m \in (-1, 3)$,
- graficul taie axa $Ox \Rightarrow \Delta = 2(m^2 - 1) \geq 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$,
- $f(-2) < 0 \Rightarrow m^2 - 4m - 6 < 0, m \in (2 - \sqrt{10}, 2 + \sqrt{10})$,
- maximul se află la dreapta punctului $(-2, 0) \Rightarrow$,

$$-\frac{m^2 - m - 2}{m^2 - 2m - 3} > -2 \Rightarrow m \in (-\infty, 3) \cup (4, +\infty).$$

Deci $m \in (-1, 3) \cap \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\} \cap (2 - \sqrt{10}, 2 + \sqrt{10}) \cap \{(-\infty, 3) \cup (4, +\infty)\} = [1, 3]$.

Ecuția (1) va admite rădăcinile x_1 și x_2 mai mari ca -2 pentru:

$$m \in (-\infty, 2 - \sqrt{10}) \cup (2 + \sqrt{10}, +\infty) \cup [1, 3] = (-\infty, 2 - \sqrt{10}) \cup [1, 3] \cup (2 + \sqrt{10}, +\infty)$$

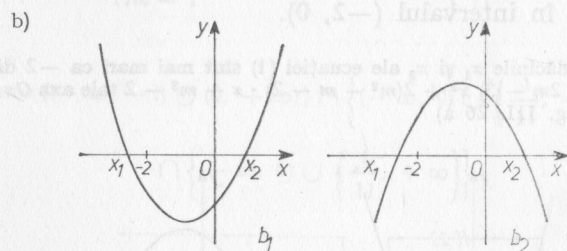


Fig. III. 26, b_1, b_2

$$\text{Fig. III. 26 } b_1: \begin{cases} m^2 - 2m - 3 > 0 \\ \Delta > 0 \\ f(-2) < 0 \end{cases} \Rightarrow m \in \{(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)\} \cap \{(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)\} \cap (2 - \sqrt{10}, 2 + \sqrt{10}) = (2 - \sqrt{10}, -1) \cup (3, 2 + \sqrt{10}).$$

$$\text{Fig. III. 26 } b_2: \begin{cases} m^2 - 2m - 3 < 0 \\ \Delta \geq 0 \\ f(-2) > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in (-1, 3) \cap \{(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)\} \cap \{(-\infty, 2 - \sqrt{10}) \cup (2 + \sqrt{10}, +\infty)\} = \Phi$$

Deci $m \in (2 - \sqrt{10}, -1) \cup (3, 2 + \sqrt{10})$

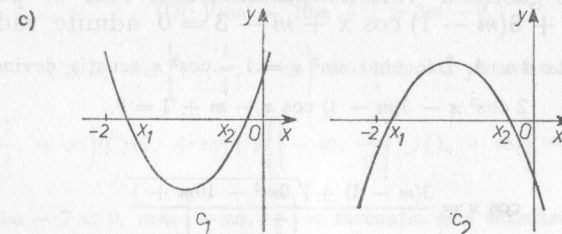


Fig. III. 26, c_1, c_2

$$\text{Fig. III. 26 } c_1: \begin{cases} m^2 - 2m - 3 > 0, \\ \Delta \geq 0; \\ f(-2) > 0; \\ f(0) > 0; \end{cases} \Rightarrow m \in \{(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)\} \cap \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\} \cap \{(-\infty, 2 - \sqrt{10}) \cup (2 + \sqrt{10}, +\infty)\} \cap \{(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)\} = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{10}, +\infty).$$

$$\text{Fig. III. 26 } c_2: \begin{cases} m^2 - 2m - 3 < 0, \\ \Delta \geq 0; \\ f(-2) < 0; \\ f(0) < 0; \end{cases} \Rightarrow m \in (-1, 3) \cap \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\} \cap (2 - \sqrt{10}, 2 + \sqrt{10}) \cap (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = [1, \sqrt{2})$$

Rezultă că $m \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup [1, \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{10}, +\infty)$

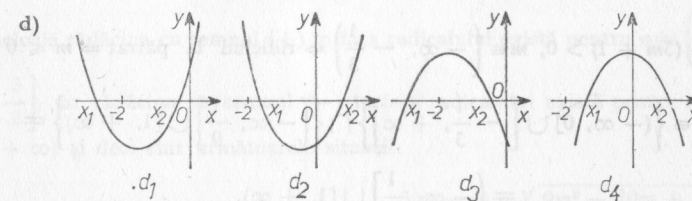


Fig. III. 26, d_1, d_2, d_3, d_4

$$\text{Fig. III. 26 } d_1 \text{ și } d_2: \begin{cases} m^2 - 2m - 3 > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$$

$$\text{Fig. III. 26 } d_3 \text{ și } d_4: \begin{cases} f(-2) \cdot f(0) < 0 \\ m^2 - 2m - 3 < 0 \\ \Delta > 0 \\ f(-2) \cdot f(0) < 0 \end{cases}$$

Aceste condiții mai pot fi încă restrinse la

$$\text{Fig. III. 26 } d_1 - d_4: \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(-2) \cdot f(0) < 0 \end{cases} \Rightarrow m \in \{(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)\} \cap$$

$$\cap \{(-\sqrt{2}, 2 - \sqrt{10}) \cup (\sqrt{2}, 2 + \sqrt{10})\} = (-\sqrt{2}, 2 - \sqrt{10}) \cup (\sqrt{2}, 2 + \sqrt{10}).$$

III. 27. Să se găsească valorile parametrului real m pentru care ecuația $2 \sin^2 x + 3(m-1) \cos x + m - 3 = 0$ admite rădăcini.

Rezolvare. Metoda 1. Înlocuind $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ecuația devine

$$2 \cos^2 x - 3(m-1) \cos x - m + 1 = 0, \quad (1)$$

de unde

$$\cos x = \frac{3(m-1) \pm \sqrt{9m^2 - 10m + 1}}{4} \quad (2)$$

cu restricțiile

$$9m^2 - 10m + 1 \geq 0 \Rightarrow m \in \left(-\infty, \frac{1}{9}\right] \cup [1, +\infty), \quad (3)$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1. \quad (4)$$

Pentru rădăcina cu semnul (+) în fața radicalului rezultă

$$(A): \sqrt{9m^2 - 10m + 1} \geq -(3m + 1), \quad (5)$$

$$(B): \sqrt{9m^2 - 10m + 1} \leq 7 - 3m.$$

$$(A) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -(3m + 1) \leq 0, m \in \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right) \Rightarrow \text{inecuația este satisfăcută} \\ -(3m + 1) > 0, m \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \text{ridicînd la pătrat} \Rightarrow m \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \in \left\{(-\infty, 0] \cup \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)\right\} \cap \left\{\left(-\infty, \frac{1}{9}\right] \cup [1, +\infty)\right\} =$$

$$= \left(-\infty, \frac{1}{9}\right] \cup [1, +\infty).$$

$$(B) \Rightarrow \left(7 - 3m \geq 0, m \in \left(-\infty, \frac{7}{3}\right] \Rightarrow \text{ridicînd la pătrat} \Rightarrow m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \in \left(-\infty, \frac{7}{3}\right] \cap \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cap \left\{\left(-\infty, \frac{1}{9}\right] \cup [1, +\infty)\right\} =$$

$$= \left(-\infty, \frac{1}{9}\right] \cup \left[1, \frac{3}{2}\right].$$

Inecuațiile (5) au loc simultan pentru

$$m \in \left\{\left(-\infty, \frac{1}{9}\right] \cup [1, +\infty)\right\} \cap \left\{\left(-\infty, \frac{1}{9}\right] \cup \left[1, \frac{3}{2}\right]\right\} = \left(-\infty, \frac{1}{9}\right] \cup \left[1, \frac{3}{2}\right].$$

Pentru rădăcina cu semnul (-) în fața radicalului rezultă:

$$(C): \sqrt{9m^2 - 10m + 1} \leq 3m + 1, \quad (6)$$

$$(D): \sqrt{9m^2 - 10m + 1} \geq 3m - 7.$$

$$(C) \Rightarrow \left(3m + 1 \geq 0, m \in \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right) \Rightarrow \text{ridicînd la pătrat} \Rightarrow m \in [0, +\infty)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \in \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right) \cap [0, +\infty) \cap \left\{\left(-\infty, \frac{1}{9}\right] \cup [1, +\infty)\right\} = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup [1, +\infty).$$

$$(D) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3m - 7 < 0, m \in \left(-\infty, \frac{7}{3}\right) \Rightarrow \text{inecuația este satisfăcută} \\ 3m - 7 \geq 0, m \in \left[\frac{7}{3}, +\infty\right) \Rightarrow \text{ridicînd la pătrat} \Rightarrow m \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \in \left\{\left[\frac{3}{2}, +\infty\right) \cap \left[\frac{7}{3}, +\infty\right)\right\} \cup \left(-\infty, \frac{7}{3}\right) \cap \left\{\left(-\infty, \frac{1}{9}\right] \cup [1, +\infty)\right\} =$$

$$= \left(-\infty, \frac{1}{9}\right] \cup [1, +\infty).$$

Inecuațiile (6) au loc simultan pentru

$$m \in \left\{\left[0, \frac{1}{9}\right] \cup [1, +\infty)\right\} \cap \left\{\left(-\infty, \frac{1}{9}\right] \cup [1, +\infty)\right\} = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup [1, +\infty).$$

În concluzie rădăcina cu semnul (+) în fața radicalului există pentru $m \in \left(-\infty, \frac{1}{9}\right] \cup \left[1, \frac{3}{2}\right]$, iar rădăcina cu semnul (-) în fața radicalului există pentru $m \in \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup [1, +\infty)$ și deci sînt următoarele situații:

$$m \in (-\infty, 0), \quad x_1 = 2k\pi \pm \arccos \frac{3(m-1) + \sqrt{9m^2 - 10m + 1}}{4},$$

$$m \in \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[1, \frac{3}{2}\right], \quad x_{1,2} = 2k\pi \pm \arccos \frac{3(m-1) \pm \sqrt{9m^2 - 10m + 1}}{4},$$

$$m \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right), \quad x_2 = 2k\pi \pm \arccos \frac{3(m-1) - \sqrt{9m^2 - 10m + 1}}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Metoda 2. Se notează $\cos x = t$ și ecuația (1) se scrie:

$$2t^2 - 3(m-1)t - m + 1 = 0. \quad (1')$$

Ecuația (1') admite rădăcinile $t_1, t_2 \in [-1, 1]$ dacă graficul funcției $f(t) = 2t^2 - 3(m-1)t - m + 1$ satisface condițiile (fig. III. 27 a):

$$\begin{cases} \Delta = 9m^2 - 10m + 1 \geq 0 \Rightarrow m \in \left(-\infty, \frac{1}{9}\right] \cup [1, +\infty), \\ f(-1) = 2m \geq 0 \Rightarrow m \in [0, +\infty), \\ f(1) = -4m + 6 \geq 0 \Rightarrow m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]. \end{cases}$$

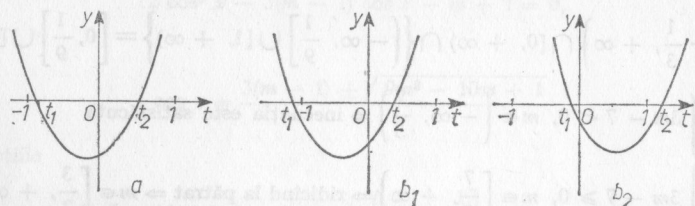


Fig. III. 27

Deci

$$m \in \left\{ \left(-\infty, \frac{1}{9}\right] \cup [1, +\infty) \right\} \cap [0, +\infty) \cap \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[1, \frac{3}{2}\right].$$

Pentru aceste valori ale lui m , $t_1, t_2 \in [-1, 1]$ și deci ecuația (1) admite două rădăcini.

Ecuația (1') admite o rădăcină în intervalul $[-1, 1]$ dacă graficul funcției $f(t)$ are pozițiile reprezentate în fig. III. 27 b_1, b_2 adică satisface condițiile:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(-1) \cdot f(1) < 0 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} 9m^2 - 10m + 1 > 0, \\ m(3 - 2m) < 0, \end{cases}$$

De aici se obține

$$\begin{aligned} m &\in \left\{ \left(-\infty, \frac{1}{9}\right] \cup [1, +\infty) \right\} \cap \left\{ (-\infty, 0) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right) \right\} = \\ &= (-\infty, 0) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right), \end{aligned}$$

pentru care ecuația (1) admite o rădăcină în intervalul $[-1, 1]$.

III. 28. Să se discute după valorile parametrului real m , natura rădăcinilor ecuației

$$3x^4 - 4mx^2 + m^2 + 3m - 6 = 0. \quad (1)$$

Rezolvare. Pentru discuția rădăcinilor ecuației bipătrate (1) se folosește ecuația rezolvantă de gradul al doilea care se obține din (1) prin substituția $x^2 = y$:

$$3y^2 - 4my + m^2 + 3m - 6 = 0, \quad (2)$$

Rezultă

$$\Delta_y = m^2 - 9m + 18, \quad \Delta_y = 0 \Rightarrow m_1 = 3, \quad m_2 = 6,$$

$$P_y = \frac{m^2 + 3m - 6}{3}, \quad m^2 + 3m - 6 = 0 \Rightarrow m_1 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2}, \quad m_2 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2},$$

$$S_y = \frac{4m}{3}, \quad m = 0.$$

Tabelul discuției rădăcinilor este:

m	Δ_y	P_y	S_y	Rădăcinile ecuației de gradul II	Rădăcinile ecuației bipătrate
$m \in \left(-\infty, \frac{-3 - \sqrt{33}}{2}\right)$	+	+	-	răd. reale, $y_1 < y_2 < 0$	4 răd. imaginare
$m = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2}$	+	0	-	răd. reale, $y_1 = 0, y_2 < 0$	2 răd. reale, $x_1 = x_2 = 0$ 2 răd. imaginare
$m \in \left(\frac{-3 - \sqrt{33}}{2}, 0\right)$	+	-	-	răd. reale, $y_1 < 0, y_2 > 0, y_1 > y_2$	2 răd. imaginare 2 răd. reale
$m = 0$	+	-	0	răd. reale, $y_1 = -y_2$	2 răd. imaginare 2 răd. reale
$m \in \left(0, \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}\right)$	+	-	+	răd. reale, $y_1 < 0, y_2 > 0, y_1 < y_2$	2 răd. imaginare 2 răd. reale
$m = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$	+	0	+	răd. reale, $y_1 = 0, y_2 > 0$	4 răd. reale; $x_1 = x_2 = 0, x_3 = -x_4$
$m \in \left(\frac{-3 + \sqrt{33}}{2}, 3\right)$	+	+	+	răd. reale, $y_1 > y_2 > 0$	4 răd. reale
$m = 3$	0	+	+	răd. reale, $y_1 = y_2 > 0$	4 răd. reale; $x_1 = -x_2 = x_3 = -x_4$
$m \in (3, 6)$	-	+	+	răd. complexe	4 răd. complexe
$m = 6$	0	+	+	răd. reale, $y_1 = y_2 > 0$	4 răd. reale; $x_1 = -x_2 = x_3 = -x_4$
$m \in (6, +\infty)$	+	+	+	răd. reale, $y_1 > y_2 > 0$	4 răd. reale

III. 29. Să se rezolve ecuațiile:

$$2(3x + 5)^6 - 3(3x + 5)^3 - 2 = 0, \quad (1)$$

$$2x^7 + 3x^6 - 4x^5 + 7x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 3x - 2 = 0. \quad (2)$$

Rezolvare. Ecuația (1), prin substituția $3x + 5 = y$, se transformă în ecuația trinomă

$$2y^6 - 3y^3 - 2 = 0 \quad (1')$$

care, conduce la două ecuații binome $y^3 = -\frac{1}{2}$, $y^3 = 2$, astfel că rădăcinile ecuației (1') sînt:

$$y_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right), \quad y_2 = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \quad y_3 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$y_4 = \sqrt[3]{2}, \quad y_5 = \sqrt[3]{2} \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \right), \quad y_6 = \sqrt[3]{2} \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \right).$$

Introducînd aceste valori în substituția făcută, se obțin rădăcinile ecuației (1)

$$x_j = \frac{y_j - 5}{3} \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Ecuația (2) este o ecuație reciprocă de gradul șapte, care se scrie sub forma echivalentă

$$2(x^7 - 1) + 3x(x^5 - 1) - 4x^2(x^3 - 1) + 7x^3(x - 1) = 0.$$

De aici rezultă că ecuația (2) este echivalentă cu ecuațiile:

$$x - 1 = 0, \quad (3)$$

$$2x^6 + 5x^5 + x^4 + 8x^3 + x^2 + 5x + 2 = 0. \quad (4)$$

Ecuația (4) este o ecuație reciprocă de gradul șase de speța întâi (conține termenul din mijloc). Împărțind ecuația prin x^3 și grupînd convenabil termenii, se obține

$$2 \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right) + 5 \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right) + x + \frac{1}{x} + 8 = 0.$$

Făcînd substituția

$$x + \frac{1}{x} = y \quad (5)$$

obținem ecuația reciprocă de gradul al treilea

$$2y^3 + 5y^2 - 5y - 2 = 0$$

care se poate scrie sub forma echivalentă

$$2(y^3 - 1) + 5y(y - 1) = 0 \quad \text{sau} \quad (y - 1)(2y^2 + 7y + 2) = 0$$

cu rădăcinile

$$y_1 = 1, \quad y_{2,3} = \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{4}.$$

Aceste valori ale lui y introduse în substituția (5) ne dau trei ecuații de gradul al doilea în x :

$$x^2 - x + 1 = 0, \quad 4x^2 + (7 + \sqrt{33})x + 4 = 0, \quad 4x^2 + (7 - \sqrt{33})x + 4 = 0.$$

Deci rădăcinile ecuației (2) sînt

$$x_1 = 1, \quad x_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \quad x_{4,5} = \frac{-(7 + \sqrt{33}) \pm \sqrt{18 + 14\sqrt{33}}}{8},$$

$$x_{6,7} = \frac{-(7 - \sqrt{33}) \pm \sqrt{18 - 14\sqrt{33}}}{8}.$$

III. 30. Se dă funcția $f: R \rightarrow \left[\frac{11}{4}, +\infty \right)$, $f(x) = x^2 - 3x + 5$.

- Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .
- Să se reprezinte grafic funcțiile inverse funcției date.

Rezolvare. a) Deoarece $a = 1 > 0$, funcția $f(x) = x^2 - 3x + 5$ este strict descrescătoare pe intervalul $I_1 = \left(-\infty, \frac{3}{2} \right]$ și strict crescătoare pe intervalul $I_2 = \left[\frac{3}{2}, +\infty \right)$.

b) Pe intervalele de strictă monotonie funcția f admite inversă. Notînd $f(x) = y$ se obține ecuația $x^2 - 3x + 5 - y = 0$ pe care o rezolvăm în raport cu x : $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{4y - 11}}{2}$. Deci funcțiile inverse sînt:

$$\varphi_1: \left[\frac{11}{4}, +\infty \right) \rightarrow \left(-\infty, \frac{3}{2} \right], \quad \varphi_1(y) = \frac{3 - \sqrt{4y - 11}}{2},$$

$$\varphi_2: \left[\frac{11}{4}, +\infty \right) \rightarrow \left[\frac{3}{2}, +\infty \right), \quad \varphi_2(y) = \frac{3 + \sqrt{4y - 11}}{2}.$$

Pentru ușurința calculelor se notează $f^{-1}(x) =$

$$= g_1(x) = \frac{3 - \sqrt{4x - 11}}{2} \quad \text{și} \quad f^{-1}(x) = g_2(x) =$$

$$= \frac{3 + \sqrt{4x - 11}}{2}. \quad \text{În plus } G_{f^{-1}} \cup G_{f^{-1}} = G_{f^{-1}}$$

(unde $G_{f^{-1}}$ este graficul funcției inverse). Deoarece graficul funcției inverse se obține din graficul funcției directe luînd simetricul acestuia față de prima bisectoare, rezultă că graficele funcțiilor $g_1(x)$ și $g_2(x)$ sînt simetricele față de bisectoarea unghiului xOy a ramurilor parabolei date, definită respectiv pe I_1 și I_2 . Deci:

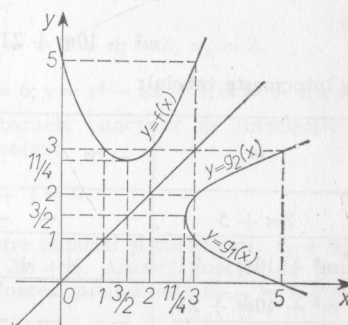


Fig. III. 30

- 1) Domeniul de definiție este R , deoarece f fiind un polinom este continuă.
 2) Intersecția graficului cu axa Ox se obține rezolvând ecuația $x^2 - 3x + 5 = 0$.
 Dar $\Delta = -11 < 0$, deci nu taie axa Ox , având rădăcini complexe conjugate.
 3) Intersecția graficului cu axa Oy se obține pentru $x = 0$, adică $f(0) = 5$; deci $A(0, 5)$.
 4) Valoarea maximă sau minimă (virful parabolei): funcția $f(x)$ admite un minim pentru $x_m = \frac{3}{2}$ și valoarea minimumului este $f_m(x_m) = -\frac{9-20}{4} = \frac{11}{4}$; deci $V\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{4}\right)$.
 5) Întocmirea tabelului de variație:

x	$-\infty$	0	1	$\frac{3}{2}$	2	3	$+\infty$
$f(x) = x^2 - 3x + 5$	$+\infty$	$\searrow$	5	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$
				$\frac{11}{4}$ (m)			

6) Construcția graficului: se realizează prin fixarea punctelor rezultate de mai sus și alte puncte ajutătoare, pe care le-am trecut în tabel.

III. 31. Se dă funcția $f: R \rightarrow F$, $f(x) = (2m + 5)x^2 - 2(m + 1)x + 1$, cu $F \subset R$ și m un parametru real. Să se determine valorile lui m pentru care funcția f are un maxim mai mare decât 5.

Rezolvare. Funcția de gradul al doilea: $f(x) = ax^2 + bx + c$ admite un maxim dacă $a < 0$, în care caz maximul are valoarea $f_M = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$. Deci trebuie ca m să satisfacă simultan sistemul de inegalități:

$$\begin{cases} 2m + 5 < 0 \\ -\frac{4(m+1)^2 - 4(2m+5)}{4(2m+5)} > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 5 < 0 \\ \frac{m^2 + 10m + 21}{2m + 5} < 0 \end{cases};$$

$$2m + 5 = 0 \Rightarrow m = -\frac{5}{2}$$

$$m^2 + 10m + 21 = 0 \Rightarrow m_1 = -7, m_2 = -3.$$

Se întocmește tabelul:

m	$-\infty$	-7	-3	$-\frac{5}{2}$	$+\infty$
$2m + 5$		-	-	0	+
$m^2 + 10m + 21$	+	+	0	-	+
$\frac{m^2 + 10m + 21}{2m + 5}$	-	-	0	+	+

Rezultă că ambele inegalități sînt satisfăcute pentru

$$m \in (-\infty, -7) \cup \left(-3, -\frac{5}{2}\right).$$

III. 32. Să se determine extremele funcției:

$$f: R \rightarrow \left[-3, \frac{7}{3}\right], f(x) = \frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - x + 1}.$$

Rezolvare. Din $y = \frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - x + 1}$, $\forall x \in R$, se obține:

$$(1 - y)x^2 - (5 - y)x + 1 - y = 0 \quad \forall x \in R \Rightarrow \Delta = -3y^2 - 2y + 21 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \in \left[-3, \frac{7}{3}\right]; \quad y_m = -3 \text{ (minim)}, \quad y_M = \frac{7}{3} \text{ (maxim)}.$$

III. 33. Se dă familia de parabole: $y = x^2 - (m + 3)x + m + n$, depinzînd de parametri reali m și n .

a) Să se găsească toate parabolele din familie care sînt tangente axei Ox și intersectează axa Oy în punctul de ordonată $y = 1$.

b) Dintre parabolele care corespund lui $n = 1$, să se găsească acelea pentru care expresia $E = (x_1 - x_2)^2$ este minimă, x_1 și x_2 fiind abscisele punctelor de intersecție ale acestor parabole cu axa Ox .

Rezolvare. a) Parabolele sînt tangente axei Ox dacă ecuația $x^2 - (m + 3)x + m + n = 0$ are rădăcini reale egale, adică $\Delta = 0$, sau

$$m^2 + 2m - 4n + 9 = 0. \quad (1)$$

Parabolele trec prin punctul $(0, 1)$ dacă $x = 0$, $y = 1$ verifică ecuația lor. Înlocuind $x = 0$, $y = 1$ se obține

$$1 = m + n, \quad (2)$$

Din (2) rezultă $n = 1 - m$ și din (1)

$$m^2 + 6m + 5 = 0 \Rightarrow m_1 = -5, m_2 = -1 \Rightarrow n_1 = 6, n_2 = 2.$$

Rezultă parabolele, $y = x^2 + 2x + 1$, $m = -5, n = 6$; $y = x^2 - 2x + 1$, $m = -1, n = 2$.

b) $n = 1 \Rightarrow y = x^2 - (m + 3)x + m + 1$. Abscisele punctelor de intersecție ale parabolelor cu axa Ox se obțin din rezolvarea ecuației:

$$x^2 - (m + 3)x + m + 1 = 0.$$

Pentru calculul expresiei E se folosesc relațiile între rădăcini și coeficienți: $x_1 + x_2 = m + 3$, $x_1 \cdot x_2 = m + 1$; se obține $E = m^2 + 2m + 5$. Această funcție de gradul al doilea în m este minimă pentru $m = -1$; valoarea minimă este $E_{\min} = 4$. Pentru $m = -1$, $n = 1$ rezultă parabola $y = x^2 - 2x$.

III. 34. Fie familia de parabole definite de funcția de gradul al doilea, $f: R \rightarrow F$, $f(x) = mx^2 + 2(m+1)x + m + 2$, $F \subset R$, unde m este un parametru real diferit de zero.

a) Să se arate că punctele de maxim ale parabolilor se află pe o semidreaptă din dreapta $y = x + 1$.

b) Fie A și B punctele de intersecție ale uneia dintre parabole cu axa $x'x$ și F proiecția vârfului V al parabolei respective pe axa $x'x$. Să se arate că oricare ar fi x există relația $|\overline{AB}| = 2|\overline{FV}|$.

c) Să se arate că toate parabolele definite de funcția dată trec printr-un punct fix ale cărui coordonate se cer.

Rezolvare. a) Funcția $f(x)$ admite maxim dacă coeficientul lui x^2 este negativ ($m < 0$). Coordonatele punctelor de maxim, adică vîrfurile parabolilor, sînt

$$x_v = x_M = -\frac{m+1}{m} \quad \text{și} \quad y_v = y_M = f(x_M) = -\frac{1}{m}.$$

Ecuția curbei pe care se află vîrfurile parabolilor se obține eliminînd parametrul m din expresiile lui x_v și y_v . Rezultă $y_v = x_v + 1$. Pentru punctele de maxim, $m < 0$, adică

$$m = -\frac{1}{1+x_M} < 0 \Rightarrow x_M \in (-1, +\infty). \text{ Deci punctele de maxim } V(x_M, y_M) \text{ aparțin}$$

semidreptei $y = x + 1$, $x \in (-1, +\infty)$.

b) Punctele de intersecție cu axa $x'x$ ale uneia dintre parabolele definite de funcția dată se obțin rezolvînd ecuația:

$$mx^2 + 2(m+1)x + m + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -\frac{m+2}{m}.$$

Deci punctele de intersecție cu axa $x'x$ sînt $A(-1, 0)$, $B\left(-\frac{m+2}{m}, 0\right)$. Pentru un

m real, oarecare se obține

$$|\overline{AB}| = |x_2 - x_1| = \left| -\frac{m+2}{m} + 1 \right| = \left| -\frac{2}{m} \right| \quad \text{și} \quad |\overline{FV}| = |y_v - y_F| = \left| -\frac{1}{m} \right|.$$

Prin urmare $|\overline{AB}| = 2 \cdot |\overline{FV}|$.

c) Se scrie funcția dată sub forma

$$y = (x^2 + 2x + 1)m + 2x + 2,$$

care conduce la ecuația $y - (x^2 + 2x + 1)m - 2x - 2 = 0$. Această ecuație trebuie să admită ca rădăcini pe (x_0, y_0) pentru orice $m \in R$ [aici (x_0, y_0) sînt coordonatele punctului fix prin care trec parabolele]. Pentru aceasta este necesar ca coeficientul lui m să fie zero, adică $x^2 + 2x + 1 = 0$, de unde $x = -1$. Pentru $x = -1$ se obține $y = 0$. Rezultă că toate parabolele trec prin punctul fix $C(-1, 0)$.

PROBLEME PROPUSE

III. 1. Să se determine valoarea lui m astfel încît ecuația:

$$\frac{m-2}{x+1} + \frac{m-5}{x-4} - \frac{m-3}{x+2} = 0$$

să fie de gradul întâi. Să se rezolve apoi ecuația.

III. 2. Să se arate că pentru $m \in R \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$ ecuația

$$\frac{(m-1)x + 2m - 3}{x^2 + 2x + 4} + \frac{2mx^2 - (m+6)x + 6(m-2)}{x^3 - 8} = \frac{2-m}{2-x}$$

este de gradul întâi. Ce se poate spune despre ecuație pentru $m = -\frac{1}{2}$?

Să se rezolve în mulțimea R ecuațiile:

$$\text{III. 3. } \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{x}{\sqrt{x} - \sqrt{1-x}} = \frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}}.$$

$$\text{III. 4. } \frac{a+x}{\sqrt{a} + \sqrt{a+x}} - \frac{2a(\sqrt{a+x} + 3)}{x} = \frac{a-x}{\sqrt{a} - \sqrt{a+x}}.$$

$$\text{III. 5. } |x-1| + |x-3| - 12 = 0;$$

$$\text{III. 6. } |x-2| + |x+1| = |x+2|.$$

$$\text{III. 7. } |3-x| - |x-2| |x+1| = x + |1-x|.$$

III. 8. Să se rezolve în numere întregi ecuația:

$$xyzt - 5xyz - 4xyt - 3xzt - 2yzt + 20xy + 15xz + 12xt + 10yz + 8yt + 6zt - 60x - 40y - 30z - 24t = -119.$$

Să se discute, după valorile parametrului real m , ecuațiile:

$$\text{III. 9. } (m^2 - 4)x + m^2 - 2m = 0.$$

$$\text{III. 10. } \frac{(2m+1)x}{m+1} - \frac{4x+1}{3-m} = x - \frac{(m-7)x-2}{m^2-2m-3}.$$

$$\text{III. 11. } m(mx+2) - a^2x = 2a, \quad a \in R.$$

Să se rezolve în mulțimea R ecuațiile următoare (m — parametru real):

$$\text{III. 12. } (m-1)x + |x+1| + m+1 = 0.$$

$$\text{III. 13. } (2m-3)|x-5| + |2-x| = 3m-4.$$

$$\text{III. 14. } (m-2)|1-2x| - (m+3) \cdot |2x-|3-x|| = \\ = 2(m-4).$$

Fie $[a]$ partea întreagă a numărului a . Să se rezolve ecuațiile:

$$\text{III. 15. } \left[\frac{x+1}{3}\right] = \frac{x-1}{2}; \quad \text{III. 16. } \left[\frac{5+6x}{8}\right] = \frac{3x-7}{5},$$

$$\text{III. 17. } \left[\frac{2x-1}{3}\right] + \left[\frac{4x+1}{6}\right] = \frac{5x-4}{3},$$

III. 18. Folosind semnul funcției de gradul întâi sau al doilea, să se studieze semnul expresiilor:

$$E_1(x) = (5-x)(4+2x)(x-1); \quad E_2(x) = \frac{(2-x)(3x+1)}{25x^2-9};$$

$$E_3(x) = (2x-5)(|x+3|-3x+4) \text{ cu } x \in R.$$

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

$$\text{III. 19. } \frac{2x-6}{(|8-x|-5x)(10-3x)} \geq 0.$$

$$\text{III. 20. } \frac{(7-2x)(x+2-|4-5x|)}{x^2-9} \leq 0.$$

Să se determine valorile reale ale lui x pentru care următoarele inecuații au loc simultan:

$$\text{III. 21. } \frac{x+3}{x+1} - \frac{1}{x-1} \geq \frac{x-5}{x-1} \quad \text{și} \quad \frac{4x-2}{x-5} < -1.$$

$$\text{III. 22. } |2x-3| + |2-x| < 3x+2 \quad \text{și} \quad \frac{|5x-1|}{x+1} + 3 \geq \frac{4-x}{x+1},$$

$$\text{III. 23. } |2x+4| - |2-x| \geq |4x-|x-1|| \quad \text{și} \quad \frac{1}{|x-2|} + \\ + \frac{|3-x|}{x^2-4} > \frac{1}{x+2}.$$

III. 24. Să se afle regiunile din planul xOy ale căror puncte au coordonatele date de inecuația $|2|x|-1| + |y| \leq 2$.

III. 25. Să se împartă planul xOy în regiuni, după semnul expresiei

$$\frac{(|x+1|+y)(x+|y-2|)}{x^2-y}.$$

Să se rezolve următoarele ecuații de gradul al doilea:

$$\text{III. 26. } x^2 - 2(a-2)x + 2a - 5 = 0.$$

$$\text{III. 27. } \frac{a+x^3}{a-x} + \frac{x^3-a}{a+x} = 2a \left(1-x + \frac{2a^2x}{a^2-x^2} \right).$$

$$\text{III. 28. } \frac{x}{a} + \frac{1}{ax-bx} + \frac{b}{a^2x-abx} = \frac{2}{a-b}, \quad a \neq b, \quad a \neq 0.$$

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

$$\text{III. 29. } |x^2+2x-3| + |x-1| = 0;$$

$$\text{III. 30. } |x^2-9| + |-x^2-4x+5| = x^2-x.$$

$$\text{III. 31. } |x^2-2x| - |2x-|x^2-1|| = x^2+1.$$

III. 32. Să se determine m și n astfel ca ecuațiile:

$$(m+5)x^2 + 4(4n-1)x + 4 = 0$$

și

$$(n+1)x^2 + m(n-1)x + 1 = 0$$

să admită aceleași rădăcini.

III. 33. Să se determine m astfel ca ecuațiile:

$$x^2 + mx + m + 2 = 0 \quad \text{și} \quad mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 2m + 1 = 0.$$

să admită o rădăcină comună. Să se rezolve apoi ecuațiile.

III. 34. Să se determine relația dintre parametrii m și n astfel ca ecuațiile:

$$mx^2 + n(m+2)x + mn = 0 \quad \text{și} \quad x^2 + (n-1)x + 3n + m = 0$$

să admită o rădăcină comună. Să se rezolve apoi ecuațiile.

III. 35. Să se determine valorile parametrului real m pentru care trinomialul

$$(m^2 - m - 6)x^2 - 2(m^2 - 1)x + m^2 + m$$

este negativ, oricare ar fi $x \in R$.

III. 36. Să se determine valorile parametrului real m astfel ca trinomialul $(2 - m)x^2 - (2m - 1)x - m + 1$ să fie pozitiv oricare ar fi $x \in R$.

III. 37. Se dă ecuația $2x^2 - (5m - 7)x + 2(3 - 5m) = 0$. Fără a rezolva ecuația să se determine m astfel ca:

- rădăcinile ecuației să fie inverse una celeilalte;
- suma pătratelor rădăcinilor ecuației date să fie egală cu 9.

III. 38. Să se determine relația dintre coeficienții ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, astfel ca rădăcinile ei să satisfacă relația

$$\sqrt{\frac{1+x_1}{1+x_2}} + \sqrt{\frac{1+x_2}{1+x_1}} = 1.$$

III. 39. Se consideră ecuația $x^2 + px + q = 0$, cu rădăcinile x_1, x_2 . Să se determine legătura dintre coeficienții p, q astfel ca să existe relația

$$\frac{x_1 + px_2}{qx_1 + x_2} = \frac{p}{q}.$$

III. 40. a) Să se formeze ecuația de gradul al doilea ale cărei rădăcini x_1, x_2 satisfac relațiile

$$4x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 4 = 0, \quad (x_1 - 1)(x_2 - 1) = \frac{1}{1+a}$$

a fiind un număr real, dat, $a \neq 1$.

b) Să se determine a astfel ca $x_1^2 + x_2^2 = 11$.

III. 41. Se dă ecuația $x^2 - mx + n = 0$, cu rădăcinile $x_1 < x_2$, ($m, n \in R$).

a) Să se formeze ecuația de gradul al doilea în y care are rădăcinile

$$y_1 = 3 + x_1, \quad y_2 = 2 + x_2.$$

b) Să se determine valorile lui m și n astfel ca

$$x_2 - x_1 = 5, \quad y_1 \cdot y_2 = 12.$$

c) Să se verifice (prin rezolvarea ecuațiilor obținute după determinarea parametrilor m și n) că cele două ecuații satisfac condițiile a) și b).

III. 42. Să se formeze ecuația de gradul al doilea știind că suma rădăcinilor este $S = m - 3$, iar discriminantul ecuației este $\Delta = m^2 +$

$+ 2m + 5$. Să se arate că rădăcinile ecuației obținute sînt reale și distincte oricare ar fi m real. Pentru ce valori ale lui m are loc relația

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 7?$$

III. 43. Se consideră ecuația $x^2 - 3mx + 18 = 0$, $m \in R$, cu rădăcinile x_1, x_2 .

a) Să se formeze ecuația de gradul al doilea în y care are rădăcinile

$$y_1 = \frac{x_1}{1+x_2}, \quad y_2 = \frac{x_2}{1+x_1}.$$

b) Să se determine m astfel ca $x_1^3 + x_2^3 \geq 18 m^2$.

III. 44. Se dă ecuația $(m - 3)x^2 + (m + 3)x - m - 1 = 0$, cu $m \in R$.

a) Să se determine valorile parametrului m astfel ca rădăcinile x_1, x_2 ale ecuației să satisfacă relația:

$$4(x_1^2 + x_2^2) - x_1x_2 - 1 = 0$$

b) Să se discute natura rădăcinilor ecuației date, după valorile parametrului real m .

III. 45. Se dă ecuația $x^2 - (2m + 7)x + m^2 + 7m + 6 = 0$, $m \in R$.

a) Să se afle valorile lui m pentru care rădăcinile x_1, x_2 verifică relația:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1x_2} = 1.$$

b) Să se rezolve ecuația.

c) Să se discute, după valorile parametrului real m , natura și semnul rădăcinilor ecuației.

III. 46. Se dă ecuația $(m - 1)x^2 + (2m - 1)x - m - 1 = 0$, $m \in R$. Să se determine valorile parametrului real m astfel ca:

a) rădăcinile x_1, x_2 ale ecuației să fie reale;

b) între rădăcini să existe relația: $x_1 + x_2 - \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} > 1$.

III. 47. Se dă ecuația $x^2 - (m - 2)x + m + 1 = 0$, cu m un parametru real. Să se determine mulțimea valorilor lui m pentru care:

- rădăcinile ecuației sînt reale,
- rădăcinile x_1, x_2 ale ecuației satisfac relația

$$-1 \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq 1.$$

III. 48. Se dă ecuația $(m + 1)x^2 - (m^2 + m + 6)x + 6m = 0$, cu m - număr întreg.

a) Să se determine m astfel ca ecuația să admită ambele rădăcini întregi și pozitive; să se rezolve în acest caz ecuația.

b) Dacă x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației date, să se determine valorile lui m astfel ca $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{1}{18}(m + 7)$.

III. 49. Se consideră ecuația $x^2 + mx + n = 0$, cu m și n parametri reali.

a) Să se formeze ecuația care admite ca rădăcini pe $y_1 = \frac{x_1 - x_2}{x_1}$, $y_2 = \frac{x_2 - x_1}{x_2}$, x_1, x_2 fiind rădăcinile ecuației date.

b) Să se discute, după valorile parametrilor reali m și n , natura și semnul rădăcinilor ecuației obținute.

III. 50. Se consideră polinomul $P(x) = 2x^2 + 6x + 3 - m(x^2 + 1)$, unde m este un parametru real.

a) Să se determine m astfel ca $P(x)$ să fie un pătrat perfect

b) Dacă x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuației $P(x) = 0$, fără a rezolva ecuația, să se calculeze $E = x_1^3 + x_2^3$.

c) Să se determine m astfel ca $E < 0$.

III. 51. Fie ecuația $x^2 - 2\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)x - \left(\frac{1}{m^2} - 1\right)\left(\frac{1}{n^2} - 1\right) = 0$.

a) Să se arate că ecuația are rădăcini reale pentru orice $m, n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Să se arate că dacă m și n reprezintă sinusul, respectiv cosinusul unui unghi $\alpha \left(\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right)$, atunci produsul rădăcinilor ecuației nu depinde de unghiul α .

c) Să se rezolve ecuația în cazul b).

d) Să se afle rădăcinile ecuației pentru $m = \sin 30^\circ$, $n = \cos 30^\circ$.

III. 52. Se dă trinomul

$$T(x, m) = (m^2 - 1)x^2 - 2(m^2 + m - 1)x + m^2 + 2m.$$

a) Să se arate că oricare ar fi m real, ecuația $T(x, m) = 0$ are rădăcinile reale.

b) Să se determine m astfel ca ambele rădăcini ale ecuației $T(x, m) = 0$ să fie cuprinse în intervalul $(-1, +1)$.

c) Fără a rezolva ecuația, să se calculeze expresia:

$$E = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2 (x_1 + x_2)}.$$

Să se determine mulțimea valorilor reale ale parametrului m astfel ca rădăcinile x_1 și x_2 ale următoarelor ecuații să satisfacă condițiile scrise în dreptul fiecăreia:

III. 53. $(m + 6)x^2 - 4mx + m + 1 = 0$, x_1, x_2 mai mari ca -1 .

III. 54. $(m - 3)x^2 - 2(m - 1)x + m = 0$, x_1, x_2 mai mici ca 2 .

III. 55. $(m - 1)x^2 - 2(m - 2)x + m - 4 = 0$, $x_1 < 2 < x_2$.

III. 56. $2x^2 - 3(m + 1)x + m^2 = 0$, o rădăcină în intervalul $(1, 2)$.

III. 57. $(m + 1)x^2 - 2mx - 3m + 4 = 0$, x_1 și x_2 între -1 și $+1$.

III. 58. Să se determine parametrul real m astfel ca rădăcinile ecuației $mx^2 + (2m - 1)x + m + 1 = 0$ să satisfacă condițiile:

a) $x_1 < x_2 < -3$;

b) $-3 < x_1 < x_2$;

c) $x_1 < -3 < x_2 < -1$;

d) $-3 < x_1 < x_2 < -1$;

e) $-3 < x_1 < -1 < x_2$;

f) $x_1 < -3 < -1 < x_2$.

III. 59. Se dă funcția de gradul al doilea: $f(x) = (3m - 2)x^2 + 2mx + 3m$, $m \in \mathbb{R}$. Să se determine valorile parametrului m astfel ca:

a) ecuația $f(x) = 0$ să admită o singură rădăcină în intervalul $(-1, 0)$;

b) ecuația $f(x) = 0$ să admită ambele rădăcini în intervalul $(-1, 0)$;

c) valoarea extremă a funcției să aparțină intervalului $(0, 1)$.

Să se determine valorile parametrului real m pentru care următoarele ecuații admit rădăcini:

III. 60. $\sin 2x + \cos 3x = m \cos x$.

III. 61. $(m - 1) \sin 3x + m \sin 2x + (m + 1) \sin x = 0$.

III. 62. $m \cos^2 x + (2m^2 - m + 1) \sin x - 3m + 1 = 0$.

III. 63. $2(m+1) \cos 2x + 4m \sin x - 3m - 1 = 0$.

III. 64. Să se găsească valorile parametrului real m astfel ca fiecare din ecuațiile

$$x^2 - (m^2 - 1)x + m^2 - 1 = 0, \quad (m^2 - 3)x^2 - 6x - m^2 + 1 = 0$$

să aibă o singură rădăcină cuprinsă între rădăcinile celeilalte ecuații.

III. 65. Se da ecuația de gradul al doilea în t :

$$(x + y - 1)t^2 + 2(y + 1)t - x + y - 1 = 0.$$

cu x, y — parametri reali.

a) Să se discute natura rădăcinilor ecuației x, y fiind coordonatele unui punct din plan; să se separe planul în regiuni după natura rădăcinilor.

b) Să se determine x și y știind că rădăcinile t_1, t_2 ale ecuației satisfac relațiile $2t_1 + t_2 = 5, t_1 + 2t_2 = 7$.

III. 66. a) Să se discute, după valorile parametrilor reali m și n , natura rădăcinilor ecuației: $(m-1)x^2 + 2(m+n-1)x + m + 2n - 2 = 0$.

b) Să se separe planul mOn în regiuni după natura rădăcinilor ecuației date.

Să se determine valorile parametrului real m astfel ca următoarele inegalități să fie satisfăcute oricare ar fi $x \in R$:

III. 67. $(m^2 - 5m + 4)x^2 - 2(m+2)x + 2 > 0$.

III. 68. $-3 < \frac{(2-m)x^2 - x + 1}{mx^2 + x + 1} < 3$.

III. 69. $2x + 3m < \frac{2x^3 + (m+1)x^2 + 9mx + 5m + 20}{x^2 + 5}$.

III. 70. $\frac{(m^2 - 5m + 4)x^2 - 2(m+2)x + 2}{(m-4)x^2 - (m-6)x + m - 5} < 0$.

III. 71. $-2 < \frac{(m-2)x^2 + (m-3)x - 1}{(m^2 + 1)x^2 - 2mx + 1} < 2$.

III. 72. $\frac{2mx + 5}{4x - 3m} > 1$.

III. 73. $\frac{x^2 + x - 6}{2m + 1} > x + 6(2m - 1), m \neq -\frac{1}{2}$.

III. 74. $\frac{x(1-m)(2x+1) - 1}{m+2} > \frac{(1-m)x^2}{2}, m \neq -2$.

III. 75. Să se determine valorile parametrului real m astfel ca toate rădăcinile ecuației

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} + m^2 \cdot \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} = 2m$$

să fie reale.

III. 76. Să se discute natura rădăcinilor ecuației $x^4 - (3a+5)x^2 + (a+1)^2 = 0$, după valorile parametrului real a .

III. 77. Se da ecuația $4x^4 - 4x^3 + (4p+5)x^2 - 4x + 4 = 0$.

a) Să se rezolve.

b) Să se determine p astfel ca toate rădăcinile ecuației date să fie reale.

III. 78. Să se discute, după valorile parametrilor reali m și n , natura rădăcinilor ecuației $(m^2 + 1)x^4 - 2mnx^2 + n^2 - 1 = 0$.

Să se rezolve ecuațiile trinome:

III. 79. $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.

III. 80. $(x - \sqrt[3]{3})^4 - 5(x - \sqrt[3]{3})^2 + 4 = 0$.

III. 81. $(1 + 3x)^{\frac{3}{2}} - 3(1 + 3x)^{\frac{1}{2}} - 4 = 0$.

Să se rezolve următoarele ecuații reciproce:

III. 82. $3x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 3 = 0$.

III. 83. $2x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 5x - 2 = 0$.

III. 84. $x^6 + 5x^5 - 4x^4 - 15x^3 + 4x^2 + 5x - 1 = 0$.

III. 85. Să se determine rădăcinile ecuației

$$6x^5 - (4m-7)x^4 + 3mx^3 + 3mx^2 - (4m-7)x + 6 = 0,$$

știind că m este valoarea extremă a funcției polinom de gradul al doilea: $f(x) = -x^2 + 18x - 72$.

III. 86. Se dă funcția $f: R \rightarrow F, f(x) = x^2 + 2px + p^2 - 1, F \subset R, p \in R$.

a) Să se descompună în factori liniari. Să se determine semnul funcției și mulțimea de valori.

b) Dacă $p \geq 0$, să se demonstreze că funcția este strict monotonă pe intervalul $(-\infty, -p-1)$.

c) Să se arate că pentru $p = 1$ există relația

$$f(3 \cdot 1) + f(3 \cdot 2) + \dots + f(3 \cdot n) = \frac{3}{2} \cdot n(n+1)(2n+3), n \in N.$$

III. 87. Se dă funcția $f: R \rightarrow F, f(x) = (m-1)x^2 - (m+2)x + m+3, F \subset R, m \in R$. Să se determine valorile lui m pentru care funcția are un minim mai mic ca 3.

III. 88. Se dă funcția F definită prin $F(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 5x + y - 2 = 0$, cu $x \in R, y \in R$.

a) Să se explicitizeze funcția în două moduri și să se determine valorile lui y pentru care valorile lui x sînt reale și de asemenea, valorile lui x pentru care y este real.

b) Să se determine valoarea reală a lui x pentru care y ia valoarea minimă, precum și valoarea reală a lui y pentru care x ia valoarea minimă.

Să se afle extremele funcțiilor:

$$\text{III. 89. } f: R \setminus \{-1\} \rightarrow R, f(x) = \frac{4x^2 + 8x + 5}{6(1+x)}.$$

$$\text{III. 90. } f: R \setminus \left\{ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right\} \rightarrow R, f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 1}.$$

$$\text{III. 91. } f: \left[\frac{1}{2}, +\infty \right) \rightarrow R, f(x) = x - 1 - \sqrt{2x-1}.$$

$$\text{III. 92. } f: (-1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty), f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{a} + \frac{a}{\sqrt{x+1}}, a \in (0, +\infty).$$

III. 93. Să se determine coeficienții reali a, b, c știind că funcția $f: R \rightarrow R, f(x) = ax^2 + bx + c$ ia valoarea -1 pentru $x = 2$ și admite un maxim egal cu 9 pentru $x = 3$.

III. 94. Să se determine a și b ($a, b \in R$) astfel ca extremele funcției $f: R \setminus \left\{ \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a - 4}}{2} \right\} \rightarrow R, f(x) = \frac{x^2 - x + a}{x^2 + bx + a + 1}$ să aibă loc pentru $x = -1$ și $x = \frac{5}{3}$.

III. 95. Să se determine a și b ($a, b \in R$) astfel ca funcția $f: R \setminus \left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{1-3b}}{3} \right\} \rightarrow R, f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{3x^2 + 2x + b}$ să aibă pentru $x = -1$ un extrem egal cu -1 .

III. 96. Pentru ce valori ale lui $a, b, c, d \in R$, funcția $f: R \setminus \left\{ \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4d}}{2} \right\} \rightarrow R, f(x) = \frac{ax^2 + bx + 4}{x^2 + cx + d}$ admite un minim egal cu 3 pentru $x = 1$ și un maxim egal cu 2 pentru $x = 0$.

III. 97. Care este numărul extremelor funcției $f: R \setminus \{1, 4\} \rightarrow R, f(x) = \frac{m-x}{x^2 - 5x + 4}$, cînd parametrul m ia toate valorile reale.

III. 98. Se dă funcția $f: R \setminus \{1, 2\} \rightarrow R, f(x) = \frac{mx^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}, m \in R$.

a) Să se găsească valorile parametrului m pentru care funcția f admite puncte de extrem.

b) Să se calculeze maximul și minimul funcției f pentru $m = -2$.

III. 99. Fie funcția $f: R \rightarrow [-4, +\infty), f(x) = x^2 - 6x + 5$. Să se reprezinte grafic funcțiile inverse funcției date.

III. 100. Se dă familia de parabole:

$$y = m(x-1)^2 - (x+2)^2, m \in R \setminus \{1\}.$$

a) Să se exprime coordonatele vîrfurilor acestor parabole în funcție de parametrul real m și să se stabilească intervalele de valori în care se pot afla coordonatele punctelor de minim ale parabolelor.

b) Să se arate că toate parabolele trec printr-un punct fix ale cărui coordonate se cer.

III. 101. Să se determine coeficienții reali a și b astfel ca parabola definită de ecuația $y = ax^2 + bx - 8$ să taie axa $x'x$ în punctele A și B cu $AB = 6$, iar vârful parabolei să aibă abscisa egală cu 1.

III. 102. Se dă funcția $f: R \rightarrow F \subset R$, $f(x) = (m+1)x^2 + 2(m-1)x + m$, cu m — parametru real.

a) Să se afle valorile lui m pentru care vîrfurile parabolilor definite de funcția dată se află în interiorul triunghiului OAB care are vîrfurile în punctele $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$.

b) Să se deseneze graficul parabolei definită de funcția $f(x)$ în cazul în care vârful parabolei se află pe prima bisectoare a axelor de coordonate.

III. 103. Se consideră funcția $f: R \rightarrow F \subset R$, $f(x) = (m-1)x^2 + 2mx + 4$, cu m — parametru real.

a) Pentru ce valori ale lui m parabola definită de funcția dată este tangentă în A axei Ox ?

b) Pentru ce valori ale lui m vârful parabolei este în B , pe axa Oy ?

c) Să se arate că cele două curbe de la a) și b) sînt simetrice în raport cu mijlocul segmentului AB .

d) Există un punct fix prin care trec parabolele definite de funcția dată, cînd m ia toate valorile reale?

III. 104. Se dau funcțiile:

$$g: R \rightarrow F_1 \subset R, g(x) = x^2 - (p+1)x - p^2 + 4,$$

$$h: R \rightarrow F_2 \subset R, h(x) = -2x^2 - (p-2)x - p + 4,$$

unde p este un parametru real.

a) Să se determine p astfel ca vârful primei parabole să fie pe cea de a doua parabolă.

b) Să se reprezinte grafic, pe același sistem de axe, cele două funcții pentru $p = 3$.

Capitolul IV

SISTEME DE ECUAȚII DE GRADUL ÎNTÎI, AL DOILEA ȘI REDUCTIBILE LA ACESTEA

PROBLEME REZOLVATE

IV. 1. Se dă sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} mx + 16y = 9, \\ x + my = 1, \end{cases}$$

cu m — parametru real.

a) Să se rezolve și să se discute sistemul.

b) Să se determine valorile parametrului real m astfel ca soluțiile sistemului să fie pozitive.

Rezolvare. a) Folosind metoda reducerii se obține:

$$x = \frac{9m - 16}{m^2 - 16}, \quad y = \frac{m - 9}{m^2 - 16} \text{ cu } m^2 - 16 \neq 0.$$

Pentru $m^2 - 16 \neq 0$, adică $m \neq \pm 4$ sistemul este compatibil cu soluția unică

$$x = \frac{9m - 16}{m^2 - 16}, \quad y = \frac{m - 9}{m^2 - 16}.$$

Pentru $m = -4$ sistemul devine:

$$\begin{cases} -4x + 16y = 9 \\ x - 4y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y = -\frac{9}{4} \\ x - 4y = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{imposibil},$$

Pentru $m = 4$ sistemul se scrie:

$$\begin{cases} 4x + 16y = 9 \\ x + 4y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y = \frac{9}{4} \\ x + 4y = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{imposibil},$$

b) Trebuie să avem

$$x = \frac{9m - 16}{m^2 - 16} \geq 0, \quad y = \frac{m - 9}{m^2 - 16} \geq 0.$$

Se întocmește următorul tabel de valori

m	$-\infty$	-4	$\frac{16}{9}$	4	9	$+\infty$
$9m - 16$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$m^2 - 16$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0
$m - 9$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x = \frac{9m - 16}{m^2 - 16}$	$-$	$-$	$+$	0	$-$	$+$
$y = \frac{m - 9}{m^2 - 16}$	$-$	$-$	$+$	$+$	0	$+$

Deci $x \geq 0, y \geq 0$ pentru $m \in \left(-4, \frac{16}{9}\right] \cup [9, +\infty)$.

IV. 2. Se dă sistemul

$$\begin{cases} 5mx + 4y = 24, \\ x + 5my = 12, \end{cases}$$

cu m — parametru real.

a) Să se rezolve și să se discute sistemul după valorile parametrului real m .

b) Să se determine valorile întregi ale parametrului m astfel ca sistemul să admită ca soluții numere întregi.

Rezolvare. a) Reducând pe y , se obține:

$$(25m^2 - 4)x = 24(5m - 2) \Rightarrow x = \frac{24(5m - 2)}{25m^2 - 4} \text{ cu } 25m^2 - 4 \neq 0.$$

Reducând pe x se obține

$$(25m^2 - 4)y = 12(5m - 2) \Rightarrow y = \frac{12(5m - 2)}{25m^2 - 4} \text{ cu } 25m^2 - 4 \neq 0.$$

Pentru $m \neq \pm \frac{2}{5}$ sistemul este compatibil determinat, cu soluția

$$x = \frac{24}{5m + 2}, \quad y = \frac{12}{5m + 2},$$

Pentru $m = \frac{2}{5}$ sistemul se reduce la:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 24 \\ x + 2y = 12 \end{cases} \Rightarrow \text{nedeterminat, cu soluția}$$

$$x = 12 - 2y \text{ și } y = k \in \mathbb{R}.$$

Pentru $m = -\frac{2}{5}$ sistemul devine:

$$\begin{cases} -2x + 4y = 24 \\ x - 2y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -12 \\ x - 2y = 12 \end{cases} \Rightarrow \text{imposibil}.$$

b) Trebuie să avem

$$x = \frac{24}{5m + 2} \in \mathbb{Z}, \quad y = \frac{12}{5m + 2} \in \mathbb{Z},$$

adică $5m + 2$ este un divizor al numărului 12. Mulțimea divizorilor lui 12 este: $A = \{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Din condițiile $5m + 2 \in A$ $m \in \mathbb{Z}$ rezultă $m \in \{-1, 0, 2\}$.

Deci

$$\begin{array}{lll} m = -1, & x = -8, & y = -4, \\ m = 0, & x = 12, & y = 6, \\ m = 2, & x = 2, & y = 1, \end{array}$$

IV. 3. Să se rezolve și să se discute sistemul

$$\begin{cases} mx + 2y = m, \\ nx + 2mny = mn, \end{cases}$$

m, n fiind doi parametri reali.

Rezolvare. Înmulțind prima ecuație cu $-mn$ se reduce y :

$$n(1 - m^2)x = mn(1 - m) \Rightarrow x = \frac{mn(1 - m)}{n(1 - m)(1 + m)} \text{ cu } n(1 - m^2) \neq 0.$$

Analog

$$y = \frac{mn(1-m)}{2n(1-m)(1+m)} \text{ cu } n(1-m^2) \neq 0.$$

a) Pentru $n \neq 0$ și $m \neq \pm 1$ sistemul este compatibil cu soluția unică $x = \frac{m}{1+m}$, $y = \frac{m}{2(1+m)}$.

b) Pentru $n \neq 0$ și $m = 1$ sistemul se scrie

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1 - 2y, y = p \in R.$$

(compatibil nedeterminat)

c) Pentru $n \neq 0$ și $m = -1$ se obține sistemul:

$$\begin{cases} -x + 2y = -1 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{imposibil.}$$

d) Pentru $n = 0$ și $m \neq \pm 1$ sistemul se reduce la ecuația $mx + 2y = m \Rightarrow y = \frac{m(1-x)}{2}$, $x = k \in R$ (compatibil nedeterminat)

e) Pentru $n = 0$ și $m = 1$ sau $n = 0$ și $m = -1$ sistemul este compatibil nedeterminat: $x = 1 - 2y$, $y = q \in R$, pentru $m = 1$ și $x = 1 + 2y$, $y = r \in R$ pentru $m = -1$.

IV. 4. Să se discute sistemul:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 11, \\ x + (m-1)y = 2m, \\ (m+1)x - my = 6m - 1, \end{cases}$$

în care m — este un parametru real.

Rezolvare. Din primele două ecuații se obține

$$x = \frac{21m - 11}{3m + 2}, y = \frac{6m - 11}{3m + 2} \text{ cu } 3m + 2 \neq 0.$$

Sistemul este compatibil dacă aceste valori pentru x și y verifică ecuația a treia

$$\frac{(m+1)(21m-11)}{3m+2} - \frac{m(6m-11)}{3m+2} = 6m-1 \Rightarrow$$

$$m^2 - 4m + 3 = 0 \Rightarrow m_1 = 1, m_2 = 3.$$

Există cazurile:

a) $m = 1$ — sistemul este compatibil: $x = 2$, $y = -1$,

b) $m = 3$ — sistemul este compatibil: $x = \frac{52}{11}$, $y = \frac{7}{11}$,

c) $m = -\frac{2}{3}$ — sistemul se scrie $\begin{cases} 3x - 5y = 11 \\ 3x - 5y = -4 \\ x + 2y = -15 \end{cases} \Rightarrow \text{incompatibil},$

d) $m \in R \setminus \{1, 3\}$ — sistemul este incompatibil.

IV. 5. Să se discute sistemul

$$\begin{cases} (m+2)x - y = 3m + 1, \\ x + 2y = 7, \\ (7m+24)x - 2(7m+11)y = m + 2, \end{cases}$$

în care m este un parametru real.

Rezolvare. Din primele două ecuații se obține

$$x = \frac{3(2m+3)}{2m+5}, y = \frac{4m+13}{2m+5} \text{ cu } 2m+5 \neq 0.$$

Înlocuind aceste valori pentru x și y în ecuația a treia se obține

$$\frac{2m^2 + 9m + 10}{2m+5} = 0.$$

de unde $m + 2 = 0$, în ipoteza $m \neq -\frac{5}{2}$.

a) Pentru $m = -\frac{5}{2}$ sistemul se scrie

$$\begin{cases} x + 2y = 13, \\ x + 2y = 7, \\ 13x + 26y = -1 \end{cases}$$

care este incompatibil.

b) Pentru $m = -2$ sistemul este compatibil: $x = -3$, $y = 5$.

c) Pentru $m \in R \setminus \{-2\}$ sistemul este incompatibil.

IV. 6. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \left[\frac{4x+9}{4} \right] = \frac{2y-5}{3}, \\ \left[\frac{4y-10}{9} \right] = \frac{4x+3}{2}, \end{cases}$$

în care simbolul $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

Rezolvare. Se notează $\frac{2y-5}{3} = u \in \mathbb{Z}$, $\frac{4x+3}{2} = v \in \mathbb{Z}$. Rezultă $y = \frac{3u+5}{2}$, $x = \frac{2v-3}{4}$ și sistemul este echivalent cu:

$$\begin{cases} u \leq \frac{v+3}{2} < u+1 \\ v \leq \frac{2u}{3} < v+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{v+3}{2} < u+1 \\ v \leq \frac{2u}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u \leq \frac{\frac{2u}{3} + 3}{2} \\ \frac{\frac{2u}{3} + 3}{2} < u+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u \leq 9 \\ 4u > 0 \end{cases} \Rightarrow u = 1; 2.$$

Pentru $u = 1$, $v \leq \frac{2}{3} < v+1 \Rightarrow v = 0$, $x = -\frac{3}{4}$, $y = 4$, iar pentru $u = 2$, $\frac{4}{3} < v+1 \Rightarrow v = 1$, $x = -\frac{1}{4}$, $y = \frac{11}{2}$. Deci soluțiile sistemului sînt $x = -\frac{3}{4}$, $y = 4$ și $x = -\frac{1}{4}$, $y = \frac{11}{2}$.

IV. 7. Să se determine valorile reale ale lui a pentru care sistemul

$$\begin{cases} |2x - y + 3| = 6, \\ |x| + |y - 1| = a, \end{cases}$$

admite soluții reale și să se rezolve în acest caz.

Rezolvare. Din ecuația a doua rezultă $a \geq 0$. Folosind definiția valorii absolute se obține:

$$|2x - y + 3| = \begin{cases} 2x - y + 3 & \text{pentru } 2x - y + 3 > 0, \\ 0 & \text{pentru } 2x - y + 3 = 0 \\ -(2x - y + 3) & \text{pentru } 2x - y + 3 < 0. \end{cases}$$

1°. Pentru $2x - y + 3 > 0$ sistemul devine:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ |x| + |y - 1| = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ |x| + |2x - 4| = a. \end{cases}$$

a) $x \in (-\infty, 0)$: $-3x = a - 4$, $y = 2x - 3 \Rightarrow x = \frac{4-a}{3}$, $y = -\frac{1+2a}{3}$, $a \in (4, +\infty)$;

b) $x \in (0, 2)$: $x = 4 - a$, $y = 5 - 2a$, $a \in (2, 4)$;

c) $x \in (2, +\infty)$: $3x = a + 4$, $y = 2x - 3 \Rightarrow x = \frac{a+4}{3}$, $y = \frac{2a-1}{3}$, $a \in (2, +\infty)$;

d) $x = 0$, $y = -3$, $a = 4$;

e) $x = 2$, $y = 1$, $a = 2$.

2°. Pentru $2x - y + 3 < 0$ sistemul se scrie

$$\begin{cases} -2x + y = 9, \\ |x| + |y - 1| = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 9, \\ |x| + |2x + 8| = a. \end{cases}$$

a) $x \in (-\infty, -4)$: $-3x = a + 8$, $y = 2x + 9 \Rightarrow x = -\frac{a+8}{3}$, $y = \frac{11-2a}{3}$, $a \in (4, +\infty)$;

b) $x \in (-4, 0)$: $x = a - 8$, $y = 2a - 7$, $a \in (4, 8)$;

c) $x \in (0, +\infty)$: $3x = a - 8$, $y = 2x + 9 \Rightarrow x = \frac{a-8}{3}$, $y = \frac{2a+11}{3}$, $a \in (8, +\infty)$;

d) $x = -4$, $y = 1$, $a = 4$;

e) $x = 0$, $y = 9$, $a = 8$.

3°. Pentru $2x - y + 3 = 0$ sistemul este imposibil ($|2x - y + 3| = 6$).

IV. 8. Să se rezolve, în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, sistemul

$$\begin{cases} |x - 1| - |y - 1| = 2, \\ |x^2 - x - 2| + 4y = 4. \end{cases}$$

Rezolvare.

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{pentru } x \in (1, +\infty), \\ 0 & \text{pentru } x = 1, \\ -(x - 1) & \text{pentru } x \in (-\infty, 1). \end{cases}$$

$$|x^2 - x - 2| = \begin{cases} x^2 - x - 2 & \text{pentru } x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty), \\ 0 & \text{pentru } x = -1, x = 2, \\ -(x^2 - x - 2) & \text{pentru } x \in (-1, 2). \end{cases}$$

a) $x \in (-\infty, -1)$,

$$\begin{cases} -x + 1 - |y - 1| = 2, \\ x^2 - x - 2 + 4y = 4 \Rightarrow y = \frac{6 - x^2 + x}{4}. \end{cases}$$

Prima ecuație devine

$$x + \left| \frac{-x^2 + x + 2}{4} \right| = -1,$$

care pentru $x \in (-\infty, -1)$ se scrie

$$x - \frac{-x^2 + x + 2}{4} = -1 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \in (-\infty, -1), x_2 = -1 \notin (-\infty, -1).$$

Pentru $x = -2$ se obține $y = 0$.

b) $x \in (-1, 1)$,

$$\begin{cases} -x + 1 - |y - 1| = 2, \\ -x^2 + x + 2 + 4y = 4 \Rightarrow y = \frac{x^2 - x + 2}{4}, \end{cases}$$

care înlocuit în prima ecuație dă:

$$x + \left| \frac{x^2 - x - 2}{4} \right| = -1.$$

Însă, pentru $x \in (-1, 1)$, $x^2 - x - 2 < 0$ și deci $x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \notin (-1, 1)$, $x_2 = 6 \notin (-1, 1)$ și sistemul nu admite soluții.

c) $x \in (1, 2)$,

$$\begin{cases} x - 1 - |y - 1| = 2, \\ -x^2 + x + 2 + 4y = 4 \Rightarrow y = \frac{x^2 - x + 2}{4}. \end{cases}$$

Prima ecuație devine

$$x - \left| \frac{x^2 - x - 2}{4} \right| = 3$$

care pentru $x \in (1, 2)$ se mai scrie

$$x + \frac{x^2 - x - 2}{4} = 3 \Rightarrow x^2 + 3x - 14 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-3 - \sqrt{65}}{2} \notin (1, 2),$$

$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{65}}{2} \notin (1, 2) \text{ și sistemul nu admite soluții.}$$

d) $x \in (2, +\infty)$,

$$\begin{cases} x - 1 - |y - 1| = 2, \\ x^2 - x - 2 + 4y = 4 \Rightarrow y = \frac{-x^2 + x + 6}{4} \end{cases}$$

și ecuația întâia se scrie

$$x - \left| \frac{-x^2 + x + 2}{4} \right| = 3,$$

sau, pentru $x \in (2, +\infty)$

$$x + \frac{-x^2 + x + 2}{4} = 3 \Rightarrow x^2 - 5x + 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{5 - i\sqrt{15}}{2} \notin (2, +\infty), x_2 = \frac{5 + i\sqrt{15}}{2} \notin (2, +\infty) \text{ și sistemul nu admite soluții.}$$

e) $x = -1$,

$$\begin{cases} 2 - |y - 1| = 2 \\ 4y = 4 \end{cases} \Rightarrow y = 1,$$

f) $x = 1$,

$$\begin{cases} -|y - 1| = 2 \\ 2 + 4y = 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}, \end{cases} \text{ pentru care prima ecuație nu are loc,}$$

g) $x = 2$,

$$1 - |y - 1| = 2,$$

$$4y = 4 \Rightarrow y = 1, \text{ iar prima ecuație nu este verificată.}$$

În concluzie, soluțiile sistemului sînt $x = -2, y = 0$; $x = -1, y = 1$.

IV. 9. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 34x - 31y = 0, \\ 560x - 448y = 0, \end{cases}$$

în care x și y sînt bazele unor sisteme de numerație.

Rezolvare. Sistemul se scrie:

$$\begin{cases} (3x + 4) - (3y + 1) = 0, \\ (5x^2 + 6x + 0) - (4y^2 + 4y + 8) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 1, \\ y^2 - 8y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_1 = -1, y_2 = 9.$$

Deoarece $y > 1$, $y = 9$ și $x = 8$.

IV. 10. Să se rezolve, în $R \times R$, sistemul

$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy + 4y^2 = 18, \\ 3x^2 - 2xy + y^2 = 9, \end{cases}$$

Rezolvare. Înlocuind y se obține:

$$\begin{cases} x^2(2 + 3t + 4t^2) = 18, \\ x^2(3 - 2t + t^2) = 9. \end{cases}$$

Împărțind ecuațiile membru cu membru, se obține ecuația

$$2t^2 + 7t - 4 = 0 \cdot t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = -4.$$

Pentru $t_1 = \frac{1}{2}$ se obține $\frac{9}{2}x^2 = 18 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2, y_{1,2} = \pm 1$.

Pentru $t_2 = -4$ se obține $54x^2 = 18 \Rightarrow x_{3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, y_{3,4} = \mp \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Deci, soluțiile sistemului, în $R \times R$, sînt

$$(-2, -1); (2, 1); \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}\right); \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{4}{\sqrt{3}}\right).$$

IV. 11. Se consideră sistemul

$$\begin{cases} x + my = 2m + 1, \\ x^2 + 2y^2 + (m-1)xy + (m+1)x + (3m^2 - 2m - 3)y = \\ = m(6m - 1), \end{cases}$$

cu m un parametru real;

a) să se rezolve sistemul;

b) să se discute, după valorile parametrului real m , natura și semnul soluțiilor sistemului.

Rezolvare. a) Înlocuind $x = 2m + 1 - my$ din prima ecuație în a doua se obține ecuația

$$(m+2)y^2 - 2(3m+2)y + 8m+2 = 0 \Rightarrow \quad (1)$$

$$\Rightarrow y_{1,2} = \frac{3m+2 \pm \sqrt{m(m-6)}}{m+2} \quad (m+2 \neq 0) \text{ și deci}$$

$$x_{1,2} = \frac{-m^2 + 3m + 2 \mp \sqrt{m(m-6)}}{m+2} \text{ cu } m+2 \neq 0.$$

b) Dacă se înlocuiește $y = \frac{2m+1-x}{m}$, din prima ecuație în a doua, se obține ecuația

$$(m+2)x^2 + 2(m^2 - 3m - 2)x + 5m + 2 = 0. \quad (2)$$

Se discută simultan, după valorile parametrului real m , natura și semnul rădăcinilor ecuațiilor de gradul al doilea (1) și (2):

$$\Delta_x = m^3(m-6), \quad P_x = \frac{5m+2}{m+2}, \quad S_x = -\frac{2(m^2-3m-2)}{m+2},$$

$$\Delta_y = m(m-6), \quad P_y = \frac{8m+2}{m+2}, \quad S_y = \frac{2(3m+2)}{m+2}.$$

Tabelul discuției rădăcinilor este următorul:

m	Δ_x	P_x	S_x	Δ_y	P_y	S_y	Natura și semnul rădăcinilor
$m \in (-\infty, -2)$	+	+	+	+	+	+	$0 < x_1 < x_2; 0 < y_1 < y_2$
$m = -2$	+			+			$x = \frac{1}{2}; y = \frac{7}{4}$
$m \in \left(-2, -\frac{2}{3}\right)$	+	-	-	+	-	-	$x_1 < 0, x_2 > 0, x_1 > x_2; y_1 < 0, y_2 > 0, y_1 > y_2$
$m = -\frac{2}{3}$	+	-	-	+	-	0	$x_1 < 0, x_2 > 0, x_1 > x_2; y_1 = -y_2$
$m \in \left(-\frac{2}{3}, \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$	+	-	-	+	-	+	$x_1 < 0, x_2 > 0, x_1 > x_2; y_1 < 0, y_2 > 0; y_1 < y_2$
$m = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$	+	-	0	+	-	+	$x_1 = -x_2; y_1 < 0, y_2 > 0, y_1 < y_2$
$m \in \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}, -\frac{2}{5}\right)$	+	-	+	+	-	+	$x_1 < 0, x_2 > 0, x_1 < x_2; y_1 < 0, y_2 > 0, y_1 < y_2$
$m = -\frac{2}{5}$	+	0	+	+	-	+	$x_1 = 0, x_2 > 0; y_1 < 0, y_2 > 0, y_1 < y_2$
$m \in \left(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{4}\right)$	+	+	+	+	-	+	$0 < x_1 < x_2; y_1 < 0, y_2 > 0, y_1 < y_2$
$m = -\frac{1}{4}$	+	+	+	+	0	+	$0 < x_1 < x_2; y_1 = 0, y_2 < 0$
$m \in \left(-\frac{1}{4}, 0\right)$	+	+	+	+	+	+	$0 < x_1 < x_2; 0 < y_1 < y_2$
$m = 0$	0	+	+	0	+	+	$x_1 = x_2 = 1; y_1 = y_2 = 1$
$m \in \left(0, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$	-	+	+	-	+	+	x_1, x_2 - complexe; y_1, y_2 - complexe
$m = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$	-	+	0	-	+	+	x_1, x_2 - complexe; y_1, y_2 - complexe
$m \in \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, 6\right)$	-	+	-	-	+	+	x_1, x_2 - complexe; y_1, y_2 - complexe
$m = 6$	0	+	-	0	+	+	$x_1 = x_2 = -2; y_1 = y_2 = \frac{5}{2}$
$m \in (6, +\infty)$	+	+	-	+	+	+	$x_1 < x_2 < 0; 0 < y_1 < y_2$

V. 12. Se dă sistemul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{m^2 - 14m + 38}{2}, \\ xy = \frac{3m^2 - 18m + 22}{4}, \end{cases}$$

cu m un parametru real.

a) Să se rezolve sistemul.

b) Să se afle valorile parametrului m pentru care sistemul admite rădăcini reale.

Rezolvare. a) Se înmulțește ecuația a doua cu 2 și se adună la prima ecuație; se obțin următoarele sisteme echivalente cu sistemul dat:

$$\begin{cases} x + y = \sqrt{2(m^2 - 8m + 15)} \\ xy = \frac{3m^2 - 18m + 22}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} x + y = -\sqrt{2(m^2 - 8m + 15)} \\ xy = \frac{3m^2 - 18m + 22}{4} \end{cases}.$$

Se scriu ecuațiile de gradul al doilea

$$t^2 - \sqrt{2(m^2 - 8m + 15)} t + \frac{3m^2 - 18m + 22}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$t_{1,2} = \frac{\sqrt{2(m^2 - 8m + 15)} \pm \sqrt{-m^2 + 2m + 8}}{2}$$

și

$$z^2 + \sqrt{2(m^2 - 8m + 15)} z + \frac{3m^2 - 18m + 22}{4} = 0,$$

$$z_{1,2} = \frac{-\sqrt{2(m^2 - 8m + 15)} \pm \sqrt{-m^2 + 2m + 8}}{2}.$$

Soluțiile sistemului dat sint:

$$x_1 = \frac{\sqrt{2(m^2 - 8m + 15)} + \sqrt{-m^2 + 2m + 8}}{2},$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{2(m^2 - 8m + 15)} - \sqrt{-m^2 + 2m + 8}}{2},$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{2(m^2 - 8m + 15)} - \sqrt{-m^2 + 2m + 8}}{2},$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{2(m^2 - 8m + 15)} + \sqrt{-m^2 + 2m + 8}}{2},$$

$$x_3 = \frac{-\sqrt{2(m^2 - 8m + 15)} + \sqrt{-m^2 + 2m + 8}}{2},$$

$$y_3 = \frac{-\sqrt{2(m^2 - 8m + 15)} - \sqrt{-m^2 + 2m + 8}}{2},$$

$$x_4 = \frac{-\sqrt{2(m^2 - 8m + 15)} - \sqrt{-m^2 + 2m + 8}}{2},$$

$$y_4 = \frac{-\sqrt{2(m^2 - 8m + 15)} + \sqrt{-m^2 + 2m + 8}}{2}.$$

b) Soluțiile sistemului sint reale dacă m satisface simultan inecuațiile

$$\begin{cases} m^2 - 8m + 15 \geq 0 \\ -m^2 + 2m + 8 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow m \in \{(-\infty, 3] \cup [5, +\infty)\} \cap [-2, 4] = [-2, 3].$$

Observație. Prima ecuație a sistemului reprezintă un cerc, iar ecuația a doua o hiperbolă. Soluțiile sistemului sint punctele de intersecție ale acestor curbe; ele sint reale dacă cercul și hiperbola sint reale și dacă se intersectează.

IV. 13. Se consideră sistemul

$$\begin{cases} x + 2y = m - 2, \\ x^2 + y^2 - mx - 2y = 3. \end{cases}$$

cu m — un parametru real,

a) Să se rezolve sistemul.

b) Să se determine valorile parametrului m pentru care sistemul admite numai soluții numere întregi negative.

c) Să se determine valorile parametrului m pentru care sistemul admite o soluție $x = y$.

Rezolvare. a) Înlocuind $x = m - 2 - 2y$ din prima ecuație în a doua se obține ecuația de gradul al doilea în y :

$$5y^2 - 2(m - 3)y - 2m + 1 = 0 \Rightarrow y_1 = -1, \quad y_2 = \frac{2m - 1}{5}$$

și deci

$$x_1 = m, \quad x_2 = \frac{m - 8}{5}.$$

b) Sistemul admite soluții numere întregi negative dacă $m \in \mathbb{Z}_-$, $\frac{m - 8}{5} = k_1 \in \mathbb{Z}_-$, $\frac{2m - 1}{5} = k_2 \in \mathbb{Z}_-$, unde $\mathbb{Z}_-$ este mulțimea numerelor întregi negative. Din $\frac{m - 8}{5} = k_1$, avem $m = 5k_1 + 8$. Pentru aceste valori ale lui m se obține

$$\frac{2m - 1}{5} = \frac{10k_1 + 15}{5} = 2k_1 + 3 = k_2 \in \mathbb{Z}_- \Rightarrow k_1 = -2, -3, -4, -5, \dots$$

Deci sistemul admite soluțiile întregi negative:

$$x_1 = 5k_1 + 8, y_1 = -1; x_2 = k_1, y_2 = 2k_1 + 3, k_1 = -2, -3, -4, -5, \dots$$

c) Pentru $x = y$ sistemul dat se scrie

$$\begin{cases} 3x = m - 2, \\ 2x^2 - (m + 2)x = 3. \end{cases}$$

Eliminând x obținem ecuația de gradul al doilea în m :

$$m^2 + 8m + 7 = 0 \Rightarrow m_1 = -7, m_2 = -1.$$

Pentru $m = -7$, obținem $x_1 = -7, y_1 = -1; x_2 = y_2 = -3$, iar pentru $m = -1$, se obține: $x_1 = y_1 = -1; x_2 = -\frac{9}{5}, y_2 = -\frac{3}{5}$.

IV. 14. Se dă sistemul

$$\begin{cases} 2x + y = m + 1, \\ xy + 4x + 2y = m^2 - 1, \\ 3xy + 10x + 5y = m^2 + 2m - 5, \end{cases}$$

cu m — un parametru real.

a) Să se determine valorile lui m pentru care sistemul este compatibil.

b) Pentru aceste valori ale lui m să se rezolve sistemul dat.

Rezolvare. a) Din primele două ecuații se obține

$$\begin{cases} 2x + y = m + 1, \\ xy = m^2 - 2m - 3. \end{cases} \quad (1)$$

Pentru ca sistemul să fie compatibil trebuie ca soluțiile x, y ale sistemului (1) să verifice ecuația a treia din sistemul dat; se obține astfel ecuația

$$3(m^2 - 2m - 3) + 5(m + 1) = m^2 + 2m - 5$$

sau

$$2m^2 - 3m + 1 = 0 \Rightarrow m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = 1.$$

b) Pentru $m = \frac{1}{2}$ sistemul (1) se scrie

$$\begin{cases} 2x + y = \frac{3}{2} \\ xy = -\frac{15}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = \frac{3}{2} \\ 2xy = -\frac{15}{2} \end{cases} \Rightarrow t^2 - \frac{3}{2}t - \frac{15}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{129}}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{3 + \sqrt{129}}{8}, y_1 = \frac{3 - \sqrt{129}}{4}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{3 - \sqrt{129}}{8}, y_2 = \frac{3 + \sqrt{129}}{4}.$$

Pentru $m = 1$ sistemul (1) devine:

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ xy = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2xy = -8 \end{cases} \Rightarrow t^2 - 2t - 8 = 0 \Rightarrow t_1 = 4,$$

$$t_2 = -2 \Rightarrow x_1 = 2, y_1 = -2; x_2 = -1, y_2 = 4.$$

IV. 15. a) Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} ax + by = ap + bq, \\ x^2 + y^2 = p^2 + q^2, \end{cases}$$

în care a, b, p, q sînt constante reale.

b) Să se determine relația dintre coeficienții a, b, p, q , astfel ca sistemul să admită soluțiile $x_1 = x_2, y_1 = y_2$.

Rezolvare. a) Înlocuind $x = p - \frac{b}{a}(y - q)$ din prima ecuație în a doua se obține

$$(a^2 + b^2)y^2 - 2b(ap + bq)y + q^2(b^2 - a^2) + 2abpq = 0 \Rightarrow y_1 = q, y_2 = \frac{2abp - a^2q + b^2q}{a^2 + b^2} \text{ și deci } x_1 = p, x_2 = \frac{2abq + a^2p - b^2p}{a^2 + b^2}.$$

b) Rezultă

$$\begin{cases} p = \frac{2abq + a^2p - b^2p}{a^2 + b^2} \\ q = \frac{2abp - a^2q + b^2q}{a^2 + b^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{p}{q}.$$

Observație. Din b) rezultă condiția ca dreapta $ax + by = ap + bq$ să fie tangentă cercului $x^2 + y^2 = p^2 + q^2$.

IV. 16. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x^3 = ax + by, \\ y^3 = ay + bx. \end{cases}$$

a, b — fiind constante reale.

Rezolvare. Adunînd ecuațiile, membru cu membru, și apoi scăzînd ecuațiile, se obține sistemul echivalent:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = (a + b)(x + y) \\ x^3 - y^3 = (a - b)(x - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)(x^2 - xy + y^2 - a - b) = 0 \\ (x - y)(x^2 + xy + y^2 - a + b) = 0. \end{cases}$$

Se rezolvă sistemele:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad (1) ; \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = a - b \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = a + b \\ x - y = 0 \end{cases} \quad (3) ; \quad \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = a + b \\ x^2 + xy + y^2 = a - b \end{cases} \quad (4)$$

Sistemul (1) are soluția $x = y = 0$.

Sistemul (2) conduce la sistemul echivalent

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ xy = b - a \end{cases} \Rightarrow x = -y = \pm \sqrt{a - b}.$$

Înlocuind, $x = y$ sistemul (3) dă $x = y = \pm \sqrt{a + b}$.

Sistemul (4), prin scăderea ecuațiilor, membru cu membru, se scrie

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = a + b \\ xy = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = a - 2b \\ xy = -b \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^2 - \sqrt{a - 2b}x - b = 0, \quad t^2 + \sqrt{a - 2b}t - b = 0,$$

de unde

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{a - 2b} \pm \sqrt{a + 2b}}{2}; \quad t_{1,2} = \frac{-\sqrt{a - 2b} \pm \sqrt{a + 2b}}{2}.$$

Deci soluțiile sistemului (4) sînt:

$$x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{a - 2b} + \sqrt{a + 2b}}{2}, \quad y_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{a - 2b} - \sqrt{a + 2b}}{2},$$

$$x_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{a - 2b} - \sqrt{a + 2b}}{2}, \quad y_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{a - 2b} + \sqrt{a + 2b}}{2}.$$

IV. 17. a) Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \sqrt[3]{\frac{x}{y}} + \sqrt[3]{\frac{y}{x}} = a, \\ x + y = b. \end{cases} \quad a, b \in R$$

b) Să se determine a și b pentru care soluțiile sistemului sînt:
1) raționale; (2) întregi (dacă $a, b \in Z$).

Rezolvare. a) Ridicînd prima ecuație la puterea a treia

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 3\sqrt[3]{\frac{x}{y}} \cdot \sqrt[3]{\frac{y}{x}} \left(\sqrt[3]{\frac{x}{y}} + \sqrt[3]{\frac{y}{x}} \right) = a^3$$

se obține sistemul

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 3a = a^3 \\ x + y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{xy} = a(a^2 - 3) \\ x + y = b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{xy} = a(a^2 - 3) + 2 \\ x + y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = b \\ xy = \frac{b^2}{(a - 1)^2(a + 2)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$t^2 - bt + \frac{b^2}{(a - 1)^2(a + 2)} = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{b}{2} \left(1 \pm \frac{a + 1}{a - 1} \sqrt{\frac{a - 2}{a + 2}} \right).$$

Deci

$$x_1 = \frac{b}{2} \left(1 + \frac{a + 1}{a - 1} \sqrt{\frac{a - 2}{a + 2}} \right), \quad y_1 = \frac{b}{2} \left(1 - \frac{a + 1}{a - 1} \sqrt{\frac{a - 2}{a + 2}} \right),$$

$$x_2 = \frac{b}{2} \left(1 - \frac{a + 1}{a - 1} \sqrt{\frac{a - 2}{a + 2}} \right), \quad y_2 = \frac{b}{2} \left(1 + \frac{a + 1}{a - 1} \sqrt{\frac{a - 2}{a + 2}} \right).$$

b) Soluțiile sistemului sînt raționale dacă a și b sînt raționali și $\frac{a - 2}{a + 2} = r^2$ cu r rațional $\Rightarrow a = \frac{2(r^2 + 1)}{1 - r^2}$.

Sistemul admite ca soluții numere întregi dacă $b = 2k$, $k \in Z$ și $1 \pm$

$$\pm \frac{a + 1}{a - 1} \sqrt{\frac{a - 2}{a + 2}} \in Z \text{ sau } b \in Z \text{ și } 1 \pm \frac{a + 1}{a - 1} \sqrt{\frac{a - 2}{a + 2}} = 2k, k \in Z.$$

Dar

$$1 \pm \frac{a + 1}{a - 1} \sqrt{\frac{a - 2}{a + 2}} = 1 \pm \left(1 + \frac{2}{a - 1} \right) \sqrt{\frac{a - 2}{a + 2}} \in Z,$$

dacă $a - 1 \in \{-2, -1, 1, 2\}$ ($a - 1$ este un divisor al lui 2) și $\frac{a - 2}{a + 2} = n^2$, cu $n \in Z$.

Unica valoare a lui a care satisface aceste condiții este $a = 2$ și soluția sistemului este $x = y = k$, cu $b = 2k$, $k \in Z$.

IV. 18. Să se rezolve, în $R \times R$, sistemul simetric

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{6}{\sqrt{xy}} + 1, \\ \sqrt[4]{x^3y} + \sqrt[4]{xy^3} = 6\sqrt[4]{2}. \end{cases}$$

Rezolvare. Produsul $xy > 0$ dacă $x > 0, y > 0$ sau $x < 0, y < 0$. Pentru $x > 0, y > 0$ se obține sistemul:

$$\begin{cases} x + y = 6 + \sqrt{xy}, \\ \sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 6\sqrt{2}. \end{cases}$$

Notind $\sqrt{xy} = u, \sqrt{x} + \sqrt{y} = v$ se obține:

$$\begin{cases} v^2 - 2u^2 = 6 + u^2 \\ uv = 6\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{6\sqrt{2}}{u}\right)^2 - 3u^2 = 6 \Rightarrow u^4 + 2u^2 - 24 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u^2 = -1 \pm 5 \Rightarrow u^2 = 4, u_{1,2} = \pm 2 \in \mathbb{R} \text{ și } u^2 = -6, u_{3,4} = \pm i\sqrt{6} \notin \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{1,2} = \pm 3\sqrt{2} \text{ și deci } x_1 = 2, y_1 = 8; x_2 = 8, y_2 = 2.$$

Pentru $x < 0, y < 0$ are loc sistemul:

$$\begin{cases} -x - y = 6 + \sqrt{xy}, \\ \sqrt{xy}(\sqrt{-x} + \sqrt{-y}) = 6\sqrt{2}. \end{cases}$$

Notind $\sqrt{xy} = u, \sqrt{-x} + \sqrt{-y} = v$ se obține

$$\begin{cases} v^2 - 3u^2 = 6 \Rightarrow u_{1,2} = \pm 2 \in \mathbb{R}, u_{3,4} = \pm i\sqrt{6} \notin \mathbb{R} \Rightarrow v_{1,2} = \pm 3\sqrt{2} \\ uv = 6\sqrt{2} \end{cases}$$

și atunci $x_3 = -2, y_3 = -8; x_4 = -8, y_4 = -2$.

IV. 19. a) Să se rezolve sistemul simetric:

$$\begin{cases} x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} = mn, \\ x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = n, \end{cases}$$

m și n fiind parametri reali.

b) Să se discute natura și semnul soluțiilor sistemului după valorile parametrilor reali m, n .

Rezolvare. a) Notind $x^{\frac{1}{2}} = u, y^{\frac{1}{2}} = v$ și sistemul se scrie

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = mn \\ u + v = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - uv + v^2 = m \\ u + v = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = n \\ uv = \frac{n^2 - m}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 - nt + \frac{n^2 - m}{3} = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{3n \pm \sqrt{12m - 3n^2}}{6}$$

Deci

$$x_{1,2} = u^2 = \frac{2m + n^2 + \varepsilon n \sqrt{12m - 3n^2}}{6},$$

$$y_{1,2} = v^2 = \frac{2m + n^2 - \varepsilon n \sqrt{12m - 3n^2}}{6}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

b) Din sistem $x, y, n \in \mathbb{R} \Rightarrow x \geq 0, y \geq 0, n \geq 0$ și $x, y \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{R} \Rightarrow x = a + ib, y = a - ib, a, b \in \mathbb{R}$. Soluțiile $x_{1,2}, y_{1,2}$ ale sistemului satisfac ecuația de gradul al doilea care are suma rădăcinilor $S = \frac{2m + n^2}{3}$ și produsul rădăcinilor $P = \frac{(n^2 - m)^2}{9}$ adică:

$$9z^2 - 3(2m + n^2)z + (n^2 - m)^2 = 0.$$

Natura și semnul soluțiilor sistemului dat sînt aceleași cu natura și semnul rădăcinilor ecuației în z . Se obține

$$\Delta = 27n^2(4m - n^2), \Delta = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{4}n^2, n = 0,$$

$$P = \left(\frac{n^2 - m}{3}\right)^2, P = 0 \Rightarrow m = n^2,$$

$$S = \frac{2m + n^2}{3}, S = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}n^2.$$

Reprezentînd grafic ecuațiile $\Delta = 0, P = 0, S = 0, n = 0$, în sistemul de coordonate nOm , planul mOn se împarte în următoarele regiuni (fig. IV. 19):

Regiunea $|\Delta| \cdot P \cdot S$. Natura rădăcinilor sistemului:

I	-	+	+	rădăcini complexe conjugate
(O α)	0	+	+	rădăcini, reale, egale, pozitive
II	+	+	+	rădăcini reale, pozitive
(O β)	+	0	+	$x_1 = 0, y_1 > 0$ sau $x_2 > 0, y_2 = 0$
III	+	+	+	rădăcini reale, pozitive
IV	+			sistemul nu admite soluții ($n < 0$)
V	-	+	+	rădăcini complexe conjugate
($\gamma' O\gamma \setminus \{0\}$)	-	+	0	rădăcini complexe conjugate
VI	-	+	-	rădăcini complexe conjugate
O(0,0)	0	0	0	$x = 0, y = 0$

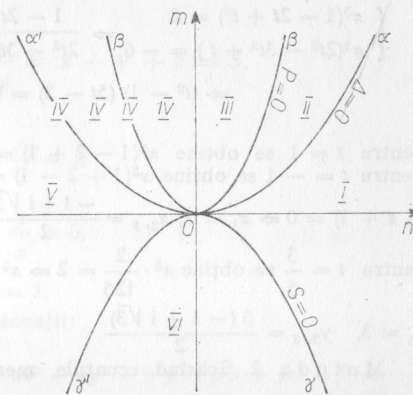


Fig. IV. 19.

IV. 20. Să se găsească toate soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} x^3 - 2x^2y + y^3 = 2, \\ 2y^3 - 3xy^2 + x^2y = -6. \end{cases}$$

Rezolvare. Metoda 1 În membrul stâng sînt polinoame omogene de gradul al treilea. Se face substituția $y = tx$ și sistemul devine

$$\begin{cases} x^3(1 - 2t + t^3) = 2 \\ x^3(2t^3 - 3t^2 + t) = -6 \end{cases} \Rightarrow \frac{1 - 2t + t^3}{2t^3 - 3t^2 + t} = -\frac{1}{3} \Rightarrow 5t^3 - 3t^2 - 5t + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t^2 - 1)(5t - 3) = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \pm 1, t_3 = \frac{3}{5},$$

Pentru $t = 1$ se obține $x^3(1 - 2 + 1) = 2$, imposibil.

Pentru $t = -1$ se obține $x^3(1 + 2 - 1) = 2 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ și $y_1 = -1, y_{2,3} = -\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Pentru $t = \frac{3}{5}$ se obține $x^3 \cdot \frac{2}{125} = 2 \Rightarrow x^3 - 125 = 0, x_1 = 5, x_{2,3} = \frac{5(-1 \pm i\sqrt{3})}{2}$ și $y_1 = 3, y_{2,3} = \frac{3(-1 \pm i\sqrt{3})}{2}$.

Metoda 2. Scăzînd ecuațiile, membru cu membru, se obține: $(x - y)^3 = 8$, de unde $x - y = 2\alpha_j (j = -1, 2, 3)$ cu α_j rădăcinile cubice ale unității ($\alpha_1 = 1, \alpha_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$). Înlocuind $x = y + 2\alpha_j$ în prima ecuație a sistemului și folosind relația

$$\alpha_j^3 = 1 \text{ se obține } \alpha_j y^2 - 2\alpha_j^2 y - 3 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{\alpha_j^2 \pm \sqrt{\alpha_j^4 + 3\alpha_j}}{\alpha_j} = \frac{\alpha_j^2 \pm 2\alpha_j^2}{\alpha_j} =$$

$$= \alpha_j(1 \pm 2) \text{ și } x_{1,2} = \alpha_j(3 \pm 2).$$

Deci soluțiile sistemului sînt:

$x_{1j} = 5\alpha_j, y_{1j} = 3\alpha_j$ și $x_{2j} = \alpha_j, y_{2j} = -\alpha_j$ cu $\alpha_j (j = 1, 2, 3)$ rădăcinile cubice ale unității $\alpha_1 = 1, \alpha_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

IV. 21. Să se rezolve, în $R \times R \times R$, sistemul

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{6}, \\ \frac{1}{x+y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}, \\ x + y + z = 6. \end{cases}$$

Rezolvare. Înlocuind $x + y = 6 - z$ din ecuația a treia în ecuația a doua se obține

$$\frac{1}{6-z} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3} \Rightarrow z^2 - 6z + 9 = 0 \Rightarrow z = 3.$$

Deci $x + y = 3$ și din prima ecuație $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \Rightarrow xy = 2$. Se obține sistemul

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 2.$$

Soluțiile sistemului sînt $(1, 2, 3)$ sau $(2, 1, 3)$.

IV. 22. Să se rezolve sistemul

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} = x + y + z = 3.$$

Rezolvare. Sistemul se scrie

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 3, \\ \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} = 3, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$$

Se scad, membru cu membru, primele două ecuații:

$$\frac{x-z}{y} + \frac{y-x}{z} + \frac{z-y}{x} = 0 \Rightarrow x^2z - xz^2 + xy^2 - x^2y - y^2z + yz^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-y)(y-z)(z-x) = 0, \Rightarrow x = y \text{ sau } y = z \text{ sau } z = x.$$

Se obțin sistemele

$$\begin{cases} x = y \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 3 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \quad (1); \quad \begin{cases} y = z \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 3 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \quad (2); \quad \begin{cases} z = x \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 3 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \quad (3)$$

Sistemul (1) este echivalent cu

$$\begin{cases} x = y \\ \frac{x}{z} + \frac{z}{x} = 2 \Rightarrow x^2 + (3-2x)^2 = 2x(3-2x) \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \\ 2x + z = 3 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = 1, z = 1.$$

Deci sistemul (1) are soluția $x = y = z = 1$. Sistemele (2) și (3) au aceeași soluție.

IV. 23. Să se determine toate soluțiile sistemului

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ xz + yz = (xy + 1)^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14. \end{cases}$$

Rezolvare. Ridicând prima ecuație la pătrat și folosind ecuațiile rămase ale sistemului se obține

$$(xy)^2 + 3xy - 10 = 0 \Rightarrow xy = -5, xy = 2.$$

Rezultă, deci, sistemele:

$$\begin{cases} x + y = 6 - z \\ z(x + y) = 16 \end{cases} \quad (1); \quad \begin{cases} x + y = 6 - z \\ z(x + y) = 9 \end{cases} \quad (1')$$

care conduc la ecuațiile:

$$z^2 - 6z + 16 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = 3 \pm i\sqrt{7},$$

$$z^2 - 6z + 9 = 0 \Rightarrow z_{3,4} = 3.$$

Pentru $z_{1,2} = 3 \pm i\sqrt{7}$ se obține

$$\begin{cases} x + y = 3 \mp i\sqrt{7} \\ xy = -5 \end{cases} \Rightarrow t^2 - (3 \mp i\sqrt{7})t - 5 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{3 \mp i\sqrt{7} \pm \sqrt{22 \mp 6i\sqrt{7}}}{2}.$$

Pentru $z_{3,4} = 3$ rezultă

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 2.$$

Deci soluțiile sistemului sînt:

$$x_{1,2} = \frac{3 - i\sqrt{7} \pm \sqrt{22 - 6i\sqrt{7}}}{2}, \quad y_{1,2} = \frac{3 - i\sqrt{7} - \epsilon \sqrt{22 - 6i\sqrt{7}}}{2},$$

$$z_{1,2} = 3 + i\sqrt{7}, (\epsilon = \pm 1);$$

$$x_{3,4} = \frac{3 + i\sqrt{7} \pm \sqrt{22 + 6i\sqrt{7}}}{2}, \quad y_{3,4} = \frac{3 + i\sqrt{7} - \epsilon \sqrt{22 + 6i\sqrt{7}}}{2},$$

$$z_{3,4} = 3 - i\sqrt{7}, (\epsilon = \pm 1);$$

$$x_5 = 1, y_5 = 2, z_5 = 3; x_6 = 2, y_6 = 1, z_6 = 3.$$

IV. 24. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x^2 - (y - z)^2 = 6, \\ y^2 - (z - x)^2 = 10, \\ z^2 - (x - y)^2 = 15. \end{cases}$$

Rezolvare. Sistemul se scrie

$$\begin{cases} (x - y + z)(x + y - z) = 6, \\ (y - z + x)(y + z - x) = 10, \\ (z - x + y)(z + x - y) = 15. \end{cases}$$

Notînd $-x + y + z = u$, $x - y + z = v$, $x + y - z = w$ se obține

$$\begin{cases} uv = 6 \\ vw = 10 \quad (1) \Rightarrow (uvw)^2 = 900 \Rightarrow uvw = \pm 30 \\ uw = 15 \end{cases}$$

$$u = \pm 5, v = \pm 3, w = \pm 2.$$

Folosind notațiile făcute și ținînd seama de (1), din care rezultă că u, v, w au același semn, se scriu sistemele:

$$\begin{cases} -x + y + z = 5, \\ x - y + z = 3; \quad (2); \\ x + y - z = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} -x + y + z = -5, \\ x - y + z = -3, \\ x + y - z = -2. \end{cases} \quad (3)$$

Aceste sisteme se rezolvă simplu adunînd cîte două ecuații. Se obțin soluțiile: $x_1 = \frac{5}{2}$,

$y_1 = \frac{7}{2}$, $z_1 = 4$ și $x_2 = -\frac{5}{2}$, $y_2 = -\frac{7}{2}$, $z_2 = -4$. Se constată ușor că aceste soluții verifică sistemul dat.

IV. 25. a) Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2x + y + z = a - 1, \\ xy + yz + zx = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5. \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

b) Să se determine valorile lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care soluțiile sistemului sînt toate reale.

Rezolvare. a) Din prima ecuație rezultă:

$$x + y + z = a - 1 - x.$$

Ridicînd ambii membrii la pătrat și folosind celelalte două ecuații ale sistemului se obține ecuația

$$x^2 - 2(a - 1)x + a^2 - 2a - 8 = 0 \Rightarrow x_1 = a - 4, x_2 = a + 2,$$

Pentru $x = a - 4$, primele două ecuații ale sistemului dau:

$$\begin{cases} y + z = 7 - a \\ yz = a^2 - 11a + 30 \end{cases} \Rightarrow t^2 - (7 - a)t + a^2 - 11a + 30 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow t_{1,2} = \frac{7 - a \pm \sqrt{-3a^2 + 30a - 71}}{2}.$$

Pentru $x = a + 2$ rezultă

$$\begin{cases} y + z = -a - 5 \\ yz = a^2 + 7a + 12 \end{cases} \Rightarrow t^2 + (a + 5)t + a^2 + 7a + 12 = 0 \Rightarrow \\ t_{1,2} = \frac{-(a + 5) \pm \sqrt{-3a^2 - 18a - 23}}{2}.$$

Deci soluțiile sistemului sînt:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= a - 4, & y_{1,2} &= \frac{7 - a + \varepsilon \sqrt{-3a^2 + 30a - 71}}{2}, \\ & & z_{1,2} &= \frac{7 - a - \varepsilon \sqrt{-3a^2 + 30a - 71}}{2}, \quad (\varepsilon = \pm 1); \\ x_{3,4} &= a + 2, & y_{3,4} &= \frac{-(a + 5) + \varepsilon \sqrt{-3a^2 - 18a - 23}}{2}, \\ & & z_{3,4} &= \frac{-(a + 5) - \varepsilon \sqrt{-3a^2 - 18a - 23}}{2}, \quad (\varepsilon = \pm 1). \end{aligned}$$

b) Pentru ca soluțiile sistemului să fie toate reale trebuie ca:

$$\begin{cases} -3a^2 + 30a - 71 \geq 0 \\ -3a^2 - 18a - 23 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a \in \left[\frac{15 - 2\sqrt{3}}{3}, \frac{15 + 2\sqrt{3}}{3} \right] \cap \\ \cap \left[\frac{-9 - 2\sqrt{3}}{3}, \frac{-9 + 2\sqrt{3}}{3} \right] = \emptyset.$$

Deci nu există $a \in R$, pentru care să aibă loc p.b).

PROBLEME PROPUSE

Să se rezolve, în $R \times R$, sistemele:

IV. 1. $2x + 3y = a, \frac{x}{y} = \frac{a+b}{a-b}, a, b \in R, a \neq b.$

IV. 2.
$$\begin{cases} (a^2 - b^2)(ax + by) = ab(a^2 + b^2) \\ (a + b)^2x + a^2y - \frac{2ab^2(a + b)}{a - b} = ab(a + b) - b(2a + b)y, \end{cases}$$

 $a, b \in R, a \neq b.$

IV. 3.
$$\begin{cases} \frac{m+1}{x} + (m^2 - 1)y = m^2 + 1 \\ \frac{m-1}{x} + (m+1)y = m-1 \quad m \in R. \end{cases}$$

IV. 4.
$$\begin{cases} \frac{a^2 + a - 1}{x} - \frac{a^2 - a - 1}{y} = a \\ \frac{a^2 - a + 1}{x} + \frac{a^2 + a - 1}{y} = a^2, \quad a \in R. \end{cases}$$

IV. 5. $2x - y = 5; |x - 1| - |y - 3| = 3.$

IV. 6. $|x| + y = 2; |x + 1| - |y| = 3.$

IV. 7. $|x + 2y| = 8; |3x + 2| + |4y - 3| = 26.$

IV. 8. $|x + y - 1| + |x| = 5; |x + 2| - |y - 3| = a, a \in R.$

IV. 9. $|2x - y + 2| = 3; ||x - 2| - |2y - 5|| = a, a \in [0, +\infty).$

IV. 10. $\left[\frac{2x+3}{5} \right] = \frac{y+1}{2}; \left[\frac{3y-2}{2} \right] = \frac{x-1}{2}$ unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a .

IV. 11. $\left[\frac{x+2}{3} \right] = \frac{y-3}{2}; \left[\frac{y+1}{3} \right] = \frac{x+3}{2}$ unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a .

IV. 12. Să se determine a și b astfel ca sistemele

$$\begin{cases} 3x + y = a \\ 2x - 3y = 2a + b \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = a - 2b \\ 4x + 3y = b - 4 \end{cases}$$

să fie echivalente (să admită aceleași soluții).

Să se rezolve și să se discute, după valorile parametrului real m , sistemele $[(x, y) \in R \times R]$:

IV. 13.
$$\begin{cases} mx + y = m + 1, \\ x + 2y = 2. \end{cases}$$

IV. 14.
$$\begin{cases} x - (m - 2)y = 1, \\ mx + y = 1 \end{cases}$$

$$\text{IV. 15. } \begin{cases} mx - 4(m-1)y = 2, \\ (1-m)x + my = -1. \end{cases}$$

$$\text{IV. 16. } \begin{cases} (m+1)x + 2(m-1)y = m+5, \\ 2(m-1)x + (m+1)y = 2(m-3). \end{cases}$$

$$\text{IV. 17. } \begin{cases} |2x + y - 1| = m, \\ x - my = 2m + 1. \end{cases}$$

$$\text{IV. 18. } \begin{cases} |x-1| + |y+1| = m, \\ (m-1)x + y = 2. \end{cases}$$

$$\text{IV. 19. Să se determine numerele reale } a \text{ și } b \text{ astfel ca sistemul}$$

$$\begin{cases} (a-b)x + 2(a+b)y = -2a^2 \\ (a^2-b^2)x + (a^2-b^2)y = 4a^2 \end{cases}$$

să fie nedeterminat.

IV. 20. Se dă sistemul

$$\begin{cases} 2(m+2)x - (m+1)y = m, \\ m^2(x-y) = 4x-y, \end{cases}$$

cu m — un parametru real.

a) Să se rezolve și să se discute sistemul.

b) Să se determine valorile parametrului m pentru care produsul rădăcinilor sistemului este un număr negativ.

c) Pentru ce valori întregi ale lui m cel puțin una din valorile x sau y este un număr întreg?

IV. 21. Se dă sistemul

$$\begin{cases} 3mx + (m-2)y = -m, \\ (m+2)x + y = 2, \end{cases}$$

cu m — un parametru real.

a) Să se rezolve și să se discute sistemul.

b) Să se determine valorile parametrului real m astfel ca soluțiile sistemului să fie numere pozitive.

c) Să se discute după valorile parametrului real m , sistemul format din ecuațiile date și ecuația $x+y=0$.

IV. 22. Se dă sistemul

$$\begin{cases} (2+5m)x - 3my = -30, \\ x + my = 5m, \end{cases}$$

cu m — un parametru real.

a) Să se rezolve și să se discute sistemul.

b) Să se determine valorile întregi ale parametrului real m astfel ca soluțiile sistemului să fie numere întregi.

c) Să se discute, după valorile parametrului real m , sistemul format din ecuațiile date și ecuația $|x-y|=3$.

Să se determine valorile parametrului real m astfel ca sistemele următoare să fie compatibile.

$$\text{IV. 23. } \begin{cases} x + 3y = 7, \\ 2x + 5y = 9, \\ x + my = 5. \end{cases}$$

$$\text{IV. 24. } \begin{cases} x + 2y = -2, \\ -x + 3y = m, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

$$\text{IV. 25. } \begin{cases} 2x + y = 6, \\ x + my = 4, \\ 2x - my = m + 2. \end{cases}$$

$$\text{IV. 26. } \begin{cases} (m-1)x - 2y = 1, \\ (2m+1)x + y = -1, \\ x - y = m - 1. \end{cases}$$

Să se determine valorile parametrilor reali m și n astfel ca sistemele următoare să fie compatibile:

$$\text{IV. 27. } \begin{cases} mx + 2y = m + 2, \\ x + (m-n)y = 1, \\ (m+n)x + my = n, \\ x - 3y = -2. \end{cases}$$

$$\text{IV. 28. } \begin{cases} mx + (n-2)y = 3, \\ mx + ny = 2, \\ 2mx - ny = 7, \\ 2x + 3y = 4. \end{cases}$$

IV. 29. Să se discute sistemul

$$\begin{cases} x - 3y = 4, \\ x + y = 4m, \\ (m^2 + 1)x - (3m^2 - 1)y = n, \end{cases}$$

m și n fiind coordonatele unui punct din plan.

Să se rezolve, în $R \times R$, sistemele:

$$\text{IV. 30. } \begin{cases} |x^2 + y + 1| - y^2 - x = 3, \\ |x - y| = 1. \end{cases}$$

$$\text{IV. 31. } \begin{cases} \left| \frac{2x-5}{x-2} \right| + \left| \frac{2y-3}{y-1} \right| = 2, \\ |3x - 4y| = 1. \end{cases}$$

$$\text{IV. 32. } \begin{cases} \left| \frac{x-y}{y} \right| = a, \\ \left| 1 + \frac{xy}{a+1} \right| = 2, \quad a \in R. \end{cases}$$

$$\text{IV. 33. } \begin{cases} |x^2 - (a+x)y| = a^2, \\ |x-2||x-y| + y = a, \quad a \in R. \end{cases}$$

Să se rezolve sistemele:

$$\text{IV. 34. } \begin{cases} x^2 + y^2 - 3xy = 14, \\ xy + x - y = -12. \end{cases}$$

$$\text{IV. 35. } \begin{cases} 2x^2 - 5y^2 - 3x - y = -20, \\ (x-3)(y-2) = y^2 - 3y + 2. \end{cases}$$

$$\text{IV. 36. } \begin{cases} x^2 + 2xy - 8y^2 - 6x + 18y = 6, \\ 2x^2 - 3xy - 4y^2 - 3x + 9y = 3. \end{cases}$$

$$\text{IV. 37. } \begin{cases} xy^2 - 2xy + x = 64, \\ xy - 9x = -16. \end{cases}$$

Să se rezolve următoarele sisteme de ecuații în care părțile variabile sînt polinoame omogene în raport cu x și y :

$$\text{IV. 38. } \begin{cases} x^2 - 2xy + 4y^2 = 1, \\ x^2 + xy + 2y^2 = 2. \end{cases} \quad \text{IV. 39. } \begin{cases} 5x^2 - 3xy + 2y^2 = 8, \\ -xy + 3y^2 = 4. \end{cases}$$

$$\text{IV. 40. } \begin{cases} x^2 - xy + 4y^2 = 6, \\ x^2 + 3xy - 4y^2 = 9. \end{cases} \quad \text{IV. 41. } \begin{cases} 10x^2 + 3xy + y^2 = 7, \\ 7x^2 + 2xy + y^2 = 5. \end{cases}$$

IV. 42. Să se rezolve sistemul

$$201x + 105y - 32xy = 0,$$

$$203x + 305y - 64xy = 0,$$

în care x, y, xy sînt bazele unor sisteme de numerație.

IV. 43. Se consideră sistemul

$$\begin{cases} mx + (m-1)y = 2, \\ x^2 + xy + 2x - y = 2, \end{cases}$$

cu m — un parametru real.

a) Să se rezolve sistemul.

b) Să se discute natura și semnul soluțiilor sistemului după valorile parametrului real m .

IV. 44. Se dă sistemul:

$$\begin{cases} x^2 = ax + y, \\ y^2 = x + ay, \end{cases}$$

în care a este un parametru real.

a) Să se rezolve.

b) Să se determine valorile reale ale parametrului a pentru care sistemul admite soluțiile $x_i \leq 0, y_i \leq 0$.

IV. 45. Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 2(x+y) = 25m, \\ x^2 - xy + y^2 = 7, \end{cases}$$

unde m este un parametru real.

a) Să se rezolve sistemul.

b) Să se determine valorile lui m pentru care $\frac{xy}{x+y} \leq 0$, unde x, y este o soluție a sistemului.

c) Să se găsească valorile lui m pentru care soluțiile sistemului sînt pozitive.

IV. 46. Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} x^2 - my^2 = 2, \\ 2x^2 - 2x + y^2 = 1 \end{cases}$$

cu m un parametru real.

a) Să se rezolve sistemul.

b) Să se discute, după valorile parametrului real m , natura rădăcinilor sistemului.

c) Să se determine valorile lui m pentru care sistemul format din ecuațiile date împreună cu ecuația $x^2 - 4x + y^2 = -7$ este compatibil.

IV. 47. Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 6m(x+y) = n^2 - 2mn - 8m^2, \\ (x-y)^2 - (n+1)(x-y) = n+2, \end{cases}$$

cu m, n parametri reali.

a) Să se rezolve sistemul.

b) Să se determine m și n astfel ca soluțiile sistemului să fie numere întregi.

c) Să se arate că sistemul nu poate admite toate soluțiile $x_i > y_i$.

d) Să se determine m și n astfel ca soluțiile (x_i, y_i) ale sistemului să satisfacă inegalitățile $0 < x_i < y_i$.

e) Să se găsească valorile lui m și n pentru care sistemul format din ecuațiile date împreună cu ecuațiile:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 4y = -1, \\ x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y = 3 \end{cases}$$

să fie compatibil.

IV. 48. a) Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} (x+y)(xy+1) = 2axy, \\ (x^2+y^2)(x^2y^2+1) = 16x^2y^2, \quad a \in R. \end{cases}$$

b) Să se determine valorile parametrului real a pentru care soluțiile sistemului sînt reale.

c) Să se determine a astfel ca sistemul să admită și soluții $x_i = y_i$.

IV. 49. a) Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 5\sqrt{x^2 - 2ay - 22} + \sqrt{x + 2y} = 19, \\ 3\sqrt{x^2 - 2ay - 22} = 1 + 2\sqrt{x + 2y}. \quad a \in R. \end{cases}$$

b) Să se determine valorile parametrului real a pentru care sistemul admite soluții reale pozitive.

Să se rezolve sistemele:

IV. 50. $\begin{cases} x - y = 7 \\ \sqrt[3]{x^2 - xy} + \sqrt[3]{y^2 - xy} = \sqrt[3]{7}. \end{cases}$

IV. 51. $\begin{cases} x + y = 2 \\ \sqrt[3]{x^2 + xy} + \sqrt[3]{y^2 + xy} = 2\sqrt[3]{2}. \end{cases}$

IV. 52. $\begin{cases} xy + xz = 5, \\ xy + yz = 8, \\ yz + xz = 9. \end{cases}$ IV. 53. $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 10, \\ xy = \frac{1}{6}, \\ yz = \frac{1}{15}. \end{cases}$

IV. 54. $\begin{cases} xy + x + y = 19, \\ yz + y + z = 11, \\ zx + z + x = 14. \end{cases}$ IV. 55. $\begin{cases} x^2 + (y - z)^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}, \\ y^2 + (z - x)^2 = \frac{a^2 + c^2}{2}, \\ z^2 + (x - y)^2 = \frac{b^2 + c^2}{2}. \end{cases}$

Capitolul V

ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII EXPONENȚIALE ȘI LOGARITMICE

PROBLEME REZOLVATE

V. 1. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația

$$8^{|x|} = 2^{|x+2|+|x-2|}.$$

Rezolvare. Din $2^{3|x|} = 2^{|x+2|+|x-2|}$, rezultă

$$3|x| = |x+2| + |x-2|. \quad (1)$$

Există cazurile:

a) $x \in (-\infty, -2)$: $-3x = -(x+2) - (x-2) \Rightarrow x = 0 \notin (-\infty, -2)$,

b) $x \in (-2, 0)$: $-3x = (x+2) - (x-2) \Rightarrow x = -\frac{4}{3} \in (-2, 0)$,

c) $x \in (0, 2)$: $3x = x+2 - (x-2) \Rightarrow x = \frac{4}{3} \in (0, 2)$,

d) $x \in (2, +\infty)$: $3x = x+2 + x-2 \Rightarrow x = 0 \notin (2, +\infty)$,

e) $x = -2, x = 0, x = 2$ nu verifică ecuația (1).

În concluzie, soluțiile ecuației exponențiale sînt $x = \pm \frac{4}{3}$.

V. 2. Să se rezolve ecuația

$$27^{\left[\frac{2x-1}{3}\right]} - 3^{(4x-3)} = 0,$$

unde simbolul $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a .

Rezolvare. Din ecuație rezultă

$$\left[\frac{2x-1}{3} \right] = \frac{4x-3}{3}. \quad (1)$$

Se notează $\left[\frac{4x-3}{3} \right] = t \in \mathbb{Z}$ de unde, $x = \frac{3(t+1)}{4}$ și din (1) rezultă:

$$t \leq \frac{3t+1}{6} < t+1 \Rightarrow t \in \left(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3} \right) \cap \mathbb{Z} = \{-1, 0\}.$$

Pentru $t = -1$, $x = 0$, iar pentru $t = 0$, $x = \frac{3}{4}$.

V. 3. Să se rezolve ecuația

$$2\left(9^x - 7^{x-\frac{1}{2}}\right) = 7^{x+\frac{1}{2}} - 3^{2x-1}.$$

Rezolvare. $2 \cdot 9^x + 3^{2x-1} = 2 \cdot 7^{x-\frac{1}{2}} + 7^{x+\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 9^x \cdot \left(2 + \frac{1}{3}\right) = 7^{x-\frac{1}{2}} \cdot (2+7) \Rightarrow 9^x \cdot \frac{7}{3} = 7^{x-\frac{1}{2}} \cdot 9 \Rightarrow 9^{x-\frac{3}{2}} =$$

$$= 7^{x-\frac{3}{2}} \Rightarrow \left(\frac{9}{7}\right)^{x-\frac{3}{2}} = 1 \Rightarrow x - \frac{3}{2} = 0, x = \frac{3}{2}.$$

V. 4. Să se rezolve ecuația:

$$(3x-1)(3x-2)^x - (x+2)^x = (3x-2)^{x+1}$$

Rezolvare. Se trece $(3x-2)^{x+1}$ în membrul întâi și se dă factor $(3x-2)^x$; se obține

$$(3x-2)^x \cdot (3x-1-3x+2) - (x+2)^x = 0 \Rightarrow (3x-2)^x = (x+2)^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3x-2}{x+2}\right)^x = 1 \Rightarrow x=0 \text{ sau } \frac{3x-2}{x+2} = 1 \Rightarrow x=2.$$

V. 5. Să se rezolve ecuația $(ax)^{bx} = (bx)^{ax}$, cu a, b constante reale strict pozitive ($a \neq b$).

Rezolvare. Ecuația se scrie $[(ax)^b]^x = [(bx)^a]^x \Rightarrow x=0$ (pentru care ecuația dată

nu este definită) și $(ax)^b = (bx)^a \Rightarrow x = \left(\frac{b^a}{a^b}\right)^{\frac{1}{b-a}}.$

V. 6. Să se rezolve ecuația

$$\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\right)^x - 2\left(\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)^x = -1.$$

Rezolvare. Se observă că $\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}}$ și notând $\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\right)^x = t$ se

obține ecuația $t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow t_1 = -2, t_2 = 1$ și deoarece $t > 0$, rezultă că numai $t = 1$ convine; din $\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\right)^x = 1$, rezultă $x = 0$.

V. 7. a) Să se rezolve ecuația

$$3^{2x-1} + 3^x - (m+1) = 0, m \in \mathbb{R}.$$

b) Să se determine parametrul real m astfel ca ecuația să admită numai rădăcini întregi pozitive.

Rezolvare. a) Notând $3^x = t$ se obține ecuația

$$t^2 + 3t - 3(m+1) = 0 \quad (1)$$

care trebuie să admită rădăcini reale și deoarece $t = 3^x > 0$, cel puțin o rădăcină trebuie să fie pozitivă. Se observă că $S = t_1 + t_2 = -3 < 0$ și deci (1) trebuie să admită rădăcini reale de semne contrare, adică

$$\begin{cases} \Delta = 3(4m+7) \geq 0, \\ P = -3(m+1) < 0, \end{cases} \Rightarrow m \in (-1, +\infty).$$

Prin urmare, pentru $m \in (-1, +\infty)$

$$t_1 = \frac{-3 + \sqrt{3(4m+7)}}{2} > 0$$

și ecuația dată admite rădăcina

$$x = \frac{\lg(-3 + \sqrt{3(4m+7)}) - \lg 2}{\lg 3}.$$

b) Ecuația admite rădăcini întregi pozitive ($x = k \in \mathbb{Z}_+$) dacă

$$3^{2k-1} + 3^k - (m+1) = 0 \Rightarrow m = 3^{2k-1} + 3^k - 1, k \in \mathbb{Z}_+.$$

V. 8. Să se determine valorile reale ale parametrului m pentru care ecuația

$$7^{mx+|x|} = 49^{\frac{(x+1)(3-x)}{2}}$$

admite soluții.

Rezolvare. Se rezolvă ecuația

$$x^2 + (m-2)x + |x| - 3 = 0. \quad (1)$$

a) Pentru $x > 0$ ecuația se scrie

$$x^2 + (m-1)x - 3 = 0.$$

Această ecuație trebuie să admită rădăcini reale, dintre care cel puțin una pozitivă. Deoarece $x_1 x_2 = -3 < 0$, ecuația admite rădăcini de semne contrare. Rezultă

$$x_1 = \frac{1 - m + \sqrt{m^2 - 2m + 13}}{2} \in R_+$$

rădăcină a ecuației date, oricare ar fi $m \in R$ ($\Delta > 0$, $\forall m \in R$).

b) Pentru $x < 0$ se obține ecuația

$$x^2 + (m-3)x - 3 = 0,$$

care admite rădăcini reale ($\Delta = m^2 - 6m + 21 > 0$, $\forall m \in R$) și de semne contrare ($x_1 x_2 = -3 < 0$).

Prin urmare ecuația dată admite rădăcina $x_2 = \frac{3 - m - \sqrt{m^2 - 6m + 21}}{2} \in R_-$ oricare ar fi $m \in R$.

V. 9. Să se rezolve ecuația

$$(3x-1)(x-m-1)^{|x-1|-1} - (2x+m)^{|x-1|} = (x-m-1)^{|x-1|} \quad (1)$$

cu m un parametru real.

Rezolvare. Se trec toți termenii în membrul întâi și se dă factor pe $(x-m-1)^{|x-1|-1}$,

$$(x-m-1)^{|x-1|-1} \cdot (2x+m) - (2x+m)^{|x-1|} = 0,$$

de unde, împărțind ecuația prin $(2x+m)^{|x-1|}$ rezultă

$$\left(\frac{x-m-1}{2x+m} \right)^{|x-1|-1} = 1. \quad (2)$$

Din (2) rezultă

$$|x-1|-1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2.$$

Tot din (2) se obține

$$\frac{x-m-1}{2x+m} = 1 \Rightarrow x_3 = -2m-1.$$

V. 10. Să se rezolve ecuația

$$ma^{2x} + nb^{2x} = a^x b^x,$$

cu a, b constante reale strict pozitive ($a, b \neq 1$, $a \neq b$), iar m, n parametri reali.

Rezolvare. Împărțind ecuația cu $a^x b^x$ ($a^x, b^x \neq 0$) se obține

$$m \left(\frac{a}{b} \right)^x + n \left(\frac{b}{a} \right)^x - 1 = 0,$$

de unde, notind $\left(\frac{a}{b} \right)^x = y$, rezultă ecuația

$$my^2 - y + n = 0 \quad (1)$$

Rădăcinile ecuației (1) trebuie să fie reale și pozitive, sau reale și de semne contrare (în acest caz ecuația admite o rădăcină pozitivă). Avem condițiile:

$$\begin{cases} \Delta = 1 - 4mn \geq 0 \\ P = \frac{n}{m} > 0 \\ S = \frac{1}{m} > 0 \end{cases} \quad (2) \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \Delta = 1 - 4mn \geq 0 \\ P = \frac{n}{m} < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Din (2) se obține $m > 0$, $n > 0$, $mn \leq \frac{1}{4}$. Pentru aceste valori ale lui m și n ecuația admite două rădăcini:

$$\left(\frac{a}{b} \right)^x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4mn}}{2m} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{\lg(1 \pm \sqrt{1 - 4mn}) - \lg 2m}{\lg a - \lg b}.$$

Din (3) rezultă $mn < 0$ și ecuația admite o rădăcină:

$$\text{— pentru } m > 0, n < 0: \quad x_1 = \frac{\lg(1 + \sqrt{1 - 4mn}) - \lg 2m}{\lg a - \lg b}$$

$$\text{— pentru } m < 0, n > 0: \quad x_2 = \frac{\lg \frac{1 - \sqrt{1 - 4mn}}{2m}}{\lg a - \lg b}.$$

V. 11. Să se rezolve ecuația

$$0,4^{\log_a^2 x + 1} = (6,25)^{2 - \log_a x^4}, \quad a \in R_+ \setminus \{1\}.$$

Rezolvare. Observind că $0,4 = \frac{2}{5}$, $6,25 = \frac{25}{4}$ și $\log_a x^4 = \frac{\log_a x^4}{2} = 3 \log_a x$, ecuația se scrie

$$\left(\frac{2}{5} \right)^{\log_a^2 x + 1} = \left(\frac{5}{2} \right)^{2(2 - 3 \log_a x)} \Rightarrow \log_a^2 x + 1 = 2(3 \log_a x - 2), \text{ sau notind } \log_a x = y,$$

rezultă $y^2 - 6y + 5 = 0 \Rightarrow y_1 = 1, y_2 = 5$. Deci $\log_a x = 1 \Rightarrow x = a$; $\log_a x = 5 \Rightarrow x = a^5$.

V. 12. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax}} + \log_x \sqrt[4]{ax} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}}} + \log_a \sqrt[4]{\frac{a}{x}} = a, \quad a > 0, a \neq 1.$$

Rezolvare. Se scriu logaritmi în baza a și se folosesc proprietățile logaritmilor

$$\sqrt[4]{\frac{1}{4} \left(\log_a x + 1 + \frac{\log_a x + 1}{\log_a x} \right)} + \sqrt[4]{\frac{1}{4} \left(\log_a x - 1 - \frac{\log_a x - 1}{\log_a x} \right)} = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\log_a x + 1| + |\log_a x - 1| = 2a \sqrt{\log_a x}.$$

a) Pentru $a > 1$ rezultă

$$|\log_a x + 1| = \begin{cases} \log_a x + 1, & x \geq a^{-1} \\ -(\log_a x + 1), & x < a^{-1} \end{cases}; |\log_a x - 1| = \begin{cases} \log_a x - 1, & x \geq a \\ -(\log_a x - 1), & x < a \end{cases}$$

$$x \in [a, +\infty) \Rightarrow \log_a x = a \sqrt{\log_a x} \Rightarrow \log_a x = a^2 \Rightarrow x = a^{a^2} \text{ și } \log_a x \neq 0 \text{ deoarece } x \neq 1.$$

$$x \in (1, a) \Rightarrow 1 = a \sqrt{\log_a x} \Rightarrow \log_a x = a^{-2} x = a^{\frac{1}{a^2}}.$$

$x \in (0, 1) \Rightarrow$ ecuația este imposibilă ($\sqrt{\log_a x}$ nu există).

b) Pentru $0 < a < 1$ rezultă

$$|\log_a x + 1| = \begin{cases} \log_a x + 1, & 0 < x < a^{-1} \\ -(\log_a x + 1), & x > a^{-1} \end{cases}; |\log_a x - 1| = \begin{cases} \log_a x - 1, & 0 < x \leq a \\ -(\log_a x - 1), & x > a \end{cases}$$

$$x \in (0, a) \Rightarrow \log_a x = a \sqrt{\log_a x} \Rightarrow \log_a x = a^2 \Rightarrow x = a^{a^2} \notin (0, a),$$

$$x \in (a, 1) \Rightarrow 1 = a \sqrt{\log_a x} \Rightarrow \log_a x = \frac{1}{a^2} \Rightarrow x = a^{\frac{1}{a^2}} \notin (a, 1),$$

$x \in (1, +\infty)$ ecuația este imposibilă ($\sqrt{\log_a x}$ nu există).

Deci rădăcinile ecuației sînt $x = a^{a^2}$ și $x = a^{\frac{1}{a^2}}$ pentru $a > 1$, iar pentru $0 < a < 1$ ecuația nu admite rădăcini.

V. 13. Se consideră ecuația $\sqrt{x^2 - 2ax + a^{2 \log_a |x-a|}} = a^2$. Să se determine valorile reale ale lui a pentru care există ecuația și apoi să se rezolve.

Rezolvare. Trebuie ca $a^2 \in (0, 1) \cup (1, +\infty) \Rightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Deoarece $\sqrt{x^2 - 2ax + a^2} = |x - a|$, rezultă:

$$\log_a^2 |x - a| \cdot \log_a^2 |x - a| = \log_a^2 a^2 \Rightarrow \log_a^2 |x - a| = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_a^2 |x - a| = \pm 1 \Rightarrow |x - a| = a^{\pm 2}.$$

Pentru $x \in (-\infty, a)$ ecuația admite rădăcinile $x_1 = a(1 - a)$, $x_2 = a - \frac{1}{a^2}$ iar pentru

$$x \in (a, +\infty), \quad x_1 = a(1 + a), \quad x_2 = a + \frac{1}{a^2}.$$

V. 14. a) Să se rezolve ecuația

$$\log_{\sqrt{a}} \sqrt{x} = \log_a \left(\frac{m}{x} + 1 \right), \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad m \in \mathbb{R}.$$

b) Să se discute ecuația după valorile parametrului real m .

Rezolvare. a) Deoarece $\log_{\sqrt{a}} \sqrt{x} = 2 \log_a \sqrt{x} = \log_a x$ ecuația se scrie

$$\log_a x = \log_a \left(\frac{m}{x} + 1 \right) \Rightarrow x = \frac{m}{x} + 1 \Rightarrow x^2 - x - m = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4m}}{2} \text{ cu}$$

$$\text{condițiile } 1 + 4m \geq 0, \quad x > 0, \quad \frac{m}{x} + 1 > 0.$$

b) Din $x = \frac{m}{x} + 1$ rezultă că x și $\frac{m}{x} + 1$ au același semn; sînt deci de rezolvat sistemele:

$$\begin{cases} 1 + 4m \geq 0, \\ \frac{1 + \sqrt{1 + 4m}}{2} > 0, \end{cases} \quad (1); \quad \begin{cases} 1 + 4m \geq 0, \\ \frac{1 - \sqrt{1 + 4m}}{2} > 0, \end{cases} \quad (2)$$

(1) are loc pentru $m \in \left[-\frac{1}{4}, +\infty \right)$, iar (2) pentru $m \in \left[-\frac{1}{4}, +\infty \right) \cap (-\infty, 0) = \left[-\frac{1}{4}, 0 \right)$. Deci pentru $m \in \left[-\frac{1}{4}, 0 \right)$ ecuația admite două rădăcini $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4m}}{2}$ ($m = -\frac{1}{4}$, $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$), iar pentru $m \in [0, +\infty)$ ecuația admite o rădăcină $x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4m}}{2}$ ($m = 0$, $x_1 = 1$).

V. 15. a) Să se rezolve ecuația $|x - 1|^{\log_m \sqrt{x^2 - 2x + 1}} = 4m^2 - 8m + 3$, $x \neq 1$, $m > 0$, $m \neq 1$.

b) Să se determine valorile parametrului real m pentru care ecuația admite soluții.

Rezolvare. a) Rezultă: $|x - 1|^{\log_m |x-1|} = 4m^2 - 8m + 3 \Rightarrow \log_m^2 |x - 1| =$
 $= \log_m (4m^2 - 8m + 3) \Rightarrow \log_m |x - 1| = \pm \sqrt{\log_m (4m^2 - 8m + 3)} \Rightarrow |x - 1| =$
 $= m^{\pm \sqrt{\log_m (4m^2 - 8m + 3)}} \Rightarrow x_{1,2} = 1 + m^{\pm \sqrt{\log_m (4m^2 - 8m + 3)}} \text{ pentru } x > 1 \text{ și } x_{3,4} = 1 -$
 $= m^{\pm \sqrt{\log_m (4m^2 - 8m + 3)}}; \text{ pentru } x < 1, \text{ cu condițiile } \log_m (4m^2 - 8m + 3) \geq 0, 4m^2 -$
 $- 8m + 3 > 0, m > 0, m \neq 1.$

b) Se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} m > 0, m \neq 1, \\ 4m^2 - 8m + 3 > 0, \\ \log_m(4m^2 - 8m + 3) \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right), \\ \log_m(4m^2 - 8m + 3) \geq 0. \end{cases}$$

De aici rezultă următoarele două cazuri:

$$\begin{cases} m \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ 0 < 4m^2 - 8m + 3 \leq 1, \end{cases} \quad (1); \quad \begin{cases} m \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right), \\ 4m^2 - 8m + 3 \geq 1. \end{cases} \quad (2)$$

(1) ne conduce la $m \in \left[\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, iar (2) ne dă $m \in \left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$. În concluzie, pentru $m \in \left[\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ ecuația admite patru rădăcini, pentru $m \in \left(0, \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$ ecuația nu admite rădăcini, iar pentru $m \in (-\infty, 0]$ ecuația nu este definită.

V. 16. a) Să se rezolve ecuația:

$$\log_a \left(x - \frac{1}{x}\right) + 1 = \log_a \left(1 - \frac{m}{x}\right) + \log_a \frac{m+a}{\frac{1}{m} + \frac{1}{a}}, \quad a > 0, \quad (1)$$

$a \neq 1, m \in \mathbb{R} \setminus \{-a, 0\}$.

b) Să se discute ecuația după valorile parametrului real m .

Rezolvare. a) Folosind proprietățile logaritmilor se obține ecuația

$$\log_a \left(x - \frac{1}{x}\right) = \log_a \left(\frac{x-m}{x} \cdot \frac{m+a}{m+a} \cdot ma\right) \Rightarrow x - \frac{1}{x} = \frac{m(x-m)}{x}$$

sau

$$x^2 - mx + m^2 - 1 = 0 \quad (2)$$

de unde

$$x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{4-3m^2}}{2}, \text{ cu condițiile } 4-3m^2 \geq 0, x - \frac{1}{x} > 0, 1 - \frac{m}{x} > 0, m > 0. \quad (3)$$

b) Din sistemele:

$$\begin{cases} 4-3m^2 \geq 0, \\ m > 0 \\ 1 - \frac{m}{x_1} > 0, \\ x_1 - \frac{1}{x_1} > 0, \end{cases} \quad (3); \quad \begin{cases} 4-3m^2 \geq 0, \\ m > 0 \\ 1 - \frac{m}{x_2} > 0, \\ x_2 - \frac{1}{x_2} > 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{rezultă } x_1 = \frac{m + \sqrt{4-3m^2}}{2} \text{ și } x_2 = \frac{m - \sqrt{4-3m^2}}{2}.$$

Din $m > 0$ și $1 - \frac{m}{x_1} > 0$ se obține $x_1 > m$, adică

$$\frac{m + \sqrt{4-3m^2}}{2} > m \Rightarrow m \in (-1, 1) \cap \left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right] = (0, 1).$$

Pe de altă parte, din (2) rezultă $x - \frac{1}{x} = m \left(1 - \frac{m}{x}\right)$ și deoarece pentru $m \in (0, 1)$,

$1 - \frac{m}{x_1} > 0$, ultima relație din (3) este satisfăcută. Deci pentru $m \in (0, 1)$ ecuația

(1) admite soluția $x_1 = \frac{m + \sqrt{4-3m^2}}{2}$.

Inecuația a treia din (4) dă

$$1 - \frac{m}{x_2} = 1 - \frac{2m}{m - \sqrt{4-3m^2}} = \frac{-m - \sqrt{4-3m^2}}{m - \sqrt{4-3m^2}} = \frac{-(m + \sqrt{4-3m^2})^2}{4(m^2 - 1)} > 0 \Rightarrow m \in$$

$$\in (-1, 1) \cap \left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right] = (0, 1).$$

La fel ca pentru sistemul (3) se arată că $x_2 - \frac{1}{x_2} > 0$ pentru $m \in (0, 1)$ și prin urmare x_2 este soluție a ecuației (1).

În concluzie, pentru $m \in (0, 1)$ ecuația admite două soluții: $x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{4-3m^2}}{2}$; pentru $m \in [1, +\infty)$ ecuația nu admite soluții, iar pentru $m \in (-\infty, 0]$ ecuația nu este definită.

V. 17. Să se determine $a > 0, a \neq 1$ pentru care are loc $\frac{2x}{(1+x^2)^2}$.

$\cdot \frac{x^2}{a^{1+x^2}} \leq a$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. Pentru $x \leq 0$ inegalitatea are loc oricare ar fi $a > 0, a \neq 1$. Pentru $x > 0$ rezultă: $\frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ (deoarece $\frac{2x}{1+x^2} \leq 1, \frac{1}{1+x^2} \leq 1$) și $\frac{x^2}{1+x^2} \leq 1$, adică $\frac{2x}{(1+x^2)^2} \cdot a^{\frac{x^2}{1+x^2}} \leq a^{\frac{x^2}{1+x^2}} \leq a$ dacă și numai dacă $a > 1$.

V. 18. Să se rezolve inecuația

$$\log_x a + \log_{ax} x > 0, \quad a > 0.$$

Rezolvare. Se scriu logaritmi în baza $a > 0, a \neq 1$ [pentru $a = 1$, inecuația se reduce la $1 > 0, \forall x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$]:

$$\frac{1}{\log_a x} + \frac{\log_a x}{1 + \log_a x} > 0$$

sau, notînd $\log_a x = y$, se obține:

$$\frac{y^2 + y + 1}{y(1+y)} > 0 \Rightarrow y \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty).$$

Pentru $0 < a < 1, x \in (0, 1) \cup \left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$, iar pentru $a > 1, x \in \left(0, \frac{1}{a}\right) \cup (1, +\infty)$.

V. 19. Să se rezolve, în $R \times R$, sistemul

$$\begin{cases} (y+1)^x = 16, \\ (y^2-1)^{2x-3} = \frac{8(y-1)^{2x}}{(y+1)^x}. \end{cases}$$

Rezolvare. Sistemul se scrie:

$$\begin{cases} (y+1)^x = 16, \\ (y^2-1)^{2x-3} - \frac{8(y-1)^{2x}}{16} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+1)^x = 16, \\ (y-1)^{2x-3} \cdot \left[(y+1)^{2x-3} - \frac{(y-1)^3}{2}\right] = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y+1)^x = 16, \\ (y-1)^{2x-3} = 0, \end{cases} \quad (1) \quad \text{sau} \quad \begin{cases} (y+1)^x = 16, \\ \frac{16^2}{(y+1)^3} - \frac{(y-1)^3}{2} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Din $(y-1)^{2x-3} = 0 \Rightarrow 2x-3 \neq 0, y_1 = 1$ și atunci prima ecuație a sistemului (1) se scrie $2^x = 2^4 \Rightarrow x_1 = 4$.

$$\text{Din } \frac{16^2}{(y+1)^3} - \frac{(y-1)^3}{2} = 0 \Rightarrow (y^2-1)^3 = 8^3 \Rightarrow y^2-1 = 8 \Rightarrow y_{2,3} = \pm 3$$

Pentru $y_2 = 3$ din prima ecuație a sistemului (2) rezultă $4^x = 4^2 \Rightarrow x_2 = 2$, iar pentru $y_3 = -3: (-2)^x = (-2)^4 \Rightarrow x_3 = 4$. Deci, soluțiile sistemului dat sînt: $(4, 1); (2, 3); (4, -3)$.

V. 20. Să se rezolve, în $R \times R$, sistemul

$$\begin{cases} y \log_2(x^2 + y^2) + \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2} = 0, \\ x \log_2(x^2 + y^2) + \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} = 0, \end{cases}$$

Rezolvare. Dînd factor comun pe y în prima ecuație și pe x în ecuația a doua, sistemul este echivalent cu sistemele:

$$\begin{cases} y = 0 \\ \log_2(x^2 + y^2) + \frac{2y^2}{x^2 + y^2} = 0. \end{cases} \quad (1) \quad \begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} = 0, \\ x = 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} = 0, \\ \log_2(x^2 + y^2) + \frac{2y^2}{x^2 + y^2} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

(cazul $x = 0, y = 0$ nu poate avea loc).

Din (1) se obține $x = \pm 1, y = 0$, din (2) $x = 0, y = \pm 1$, iar din (3) sistemul echivalent:

$$\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) + 1 = 0 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{1}{2}, y_{1,2} = \pm \frac{1}{2}; x_{3,4} = \pm \frac{1}{2}, y_{3,4} = \mp \frac{1}{2}.$$

Deci, soluțiile sistemului sînt:

x	1	-1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
y	0	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

V. 21. Să se rezolve, în $Z \times Z$, sistemul:

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^3, \\ y^{x+y} = x^{12}. \end{cases}$$

Rezolvare. Înlocuind $y = x^{\frac{x+y}{3}}$ din prima ecuație în a doua se obține $x^{\frac{(x+y)^2}{3}} = x^{12} \Rightarrow (x+y)^2 = 36 \Rightarrow x+y = 6; (x+y = -6 \text{ nu convine deoarece } x^{-6} \in \mathbb{Z}, \text{ pentru } x \in \mathbb{Z})$.

Rezultă sistemul

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x^{x+y} = y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ x^2 = y \end{cases} \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 2.$$

Pentru $x_1 = -3$ din $x + y = 6 \Rightarrow y_1 = 9$, iar pentru $x_2 = 2$ din $x + y = 6 \Rightarrow y_2 = 4$.
Soluțiile sistemului sînt: $(-3, 9)$, $(2, 4)$.

V. 22. Să se rezolve, în $Q \times Q \times Q$, sistemul:

$$\begin{cases} 2^x + 3^y + 4^z = 6, \\ 4^x + 9^y + 16^z = 14, \\ 8^x + 27^y + 64^z = 36. \end{cases}$$

Rezolvare. Notînd $2^x = u$, $3^y = v$, $4^z = t$, sistemul se scrie:

$$\begin{cases} u + v + t = 6, \\ u^2 + v^2 + t^2 = 14, \\ u^3 + v^3 + t^3 = 36, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 6 - (v + t), \\ [6 - (v + t)]^2 + v^2 + t^2 = 14, \\ [6 - (v + t)]^3 + v^3 + t^3 = 36. \end{cases}$$

Notînd $v + t = s$ se obține:

$$\begin{cases} s^2 - 6s - vt = -11, \\ 6s^2 - 36s - vts = -60, \end{cases} \Rightarrow s^3 - 12s^2 + 47s - 60 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (s - 4)(s^2 - 8s + 15) = 0 \Rightarrow s_1 = 4, s_2 = 5, s_3 = 3.$$

Pentru $s_1 = 4$ rezultă $v + t = 4$, $vt = 3 \Rightarrow v_1 = 3, t_1 = 1, u_1 = 2; v_2 = 1, t_2 = 3, u_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 1, y_1 = 1, z_1 = 0$ sau $x_2 = 1, y_2 = 0, z_2 = \frac{\lg 3}{\lg 4} \notin Q$.

Pentru $s_2 = 5$ se obține analog $x_3 = 0, y_3 = 1, z_3 = \frac{1}{2}$ sau $x_4 = 0, y_4 = \frac{\lg 2}{\lg 3} \notin Q, z_4 = \frac{\lg 3}{\lg 4} \notin Q$.

Pentru $s_3 = 3$ rezultă $x_5 = \frac{\lg 3}{\lg 2} \notin Q, y_5 = \frac{\lg 2}{\lg 3} \notin Q, z_5 = 0$ sau $x_6 = \frac{\lg 3}{\lg 2} \notin Q, y_6 = 0, z_6 = \frac{1}{2}$.

În concluzie, soluțiile sistemului, în $Q \times Q \times Q$, sînt: $(1, 1, 0)$ și $(0, 1, \frac{1}{2})$.

V. 23. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \log_a x + \log_a y + \log_a (x + y - z) = \log_a 6, \\ \log_a y + \log_a z + \log_a (y + z - x) = \log_a 60, \quad a > 0, a \neq 1. \\ \log_a z + \log_a x + \log_a (z + x - y) = \log_a 24. \end{cases}$$

Rezolvare. Din sistem rezultă că x, y, z sînt numere reale strict pozitive. Sistemul se scrie sub formă echivalentă

$$\begin{cases} xy(x + y - z) = 6, \\ yz(-x + y + z) = 60, \\ zx(x - y + z) = 24. \end{cases}$$

Notînd $y = ux, z = vx$ sistemul devine

$$\begin{cases} x^3 u(1 + u - v) = 6, \\ x^3 uv(-1 + u + v) = 60 \\ x^3 v(1 - u + v) = 24, \end{cases} \quad (1) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1 + u - v}{-1 + u + v} = \frac{v}{10}, \\ \frac{1 - u + v}{-1 + u + v} = \frac{2u}{5}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{u}{v - 1} = \frac{v + 10}{10 - v}, \\ \frac{v}{u - 1} = \frac{2u + 5}{5 - 2u}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{(v + 10)(v - 1)}{10 - v}, \\ 2u^2 + 2uv + 3u - 5v = 5, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^3 + 14v^2 - 22v - 20 = 0 \Rightarrow v_1 = 2, v_2 = -8 + 3\sqrt{6}, v_3 = -8 - 3\sqrt{6}.$$

Deoarece $x > 0, y > 0, z > 0$, trebuie ca $u > 0, v > 0$, astfel că numai soluția $v_1 = 2$ convine. Pentru $v = 2$ rezultă $u = \frac{3}{2}$ și din (1) $x^3 = 8$, adică $x = 2$. Celelalte necunoscute sînt $y = 3, z = 4$.

PROBLEME PROPUSE

Să se rezolve ecuațiile:

V. 1. $81^{|x|} = 3^{|x+3|}, x \in R$

V. 2. $128^{|x+1|} = 2^{|x^2-x-2|}, x \in R$.

V. 3. $16^{x+3} = 256^{\left[\frac{5x+4}{8}\right]}$

V. 4. $125^{\left[\frac{3x-2}{4}\right]} + \left[\frac{2x-5}{2}\right] = 5^{3x+2}$

cu $[a]$ partea întreagă a numărului a .

V. 5. $4^x + 9^x = 2 \cdot 6^x$.

V. 6. $2 \cdot 9^x - 8^{x-\frac{1}{2}} = 8^{x+\frac{1}{2}} - 2 \cdot 3^{2x-1}$,

V. 7. $3^4 \sqrt{x} + 2 \cdot 3^2 \sqrt{x} - 3 = 0$. V. 8. $2 \cdot 5^{\frac{1}{x}} = 5 + 3 \cdot 5^{\frac{1}{2x}}$.

V. 9. $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^{x^2-1} + (\sqrt{5-2\sqrt{6}})^{x^2-1} = 2$.

V. 10. $(2x-3)^{x+3} = 5(x+1)^{x+3} - (3x+8)(2x-3)^{x+2}$

V. 11. $(4x + 5)(x + 3)^{x-2} - (3x + 2)^{x-1} = (x + 3)^{x-1}$

V. 12. $4^x \cdot 9^{\frac{1}{x}} + 4^{\frac{1}{x}} \cdot 9^x = 210.$

V. 13. a) Să se determine x din relația de recurență

$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n \quad (1)$$

știind că $u_n = e^{nx}$, $n \in \mathbb{N}$.

b) Dacă $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, să se scrie soluția generală a ecuației (1).

V. 14. a) Să se rezolve ecuația

$$4^{x+2} - m \cdot 2^{x+3} + 4m - 3 = 0, m \in \mathbb{R}.$$

b) Să se discute ecuația după valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$.

Să se rezolve ecuațiile:

V. 15. $x(x - \lg 5) = \lg(2^x + x - 1).$ V. 16. $\lg \sqrt[3]{2^{4x-1}} = 1 - \lg 1,25.$

V. 17. $\frac{\lg 2 \lg 2 + \lg(x-2)}{\lg(2x+1) + \lg(x-4) + \lg 2} = 1.$ V. 18. $\frac{2 + \lg(x+2)}{3 + \lg(2x^2 + 31x + 624)} = \frac{1}{2}.$

V. 19. Se consideră ecuația:

$$\frac{\log_b a + \log_b x}{\log_b(m+x)} = 2, b > 0, b \neq 1, a > 0, m \in \mathbb{R}, m+x \neq 1.$$

a) Să se rezolve ecuația.

b) Să se discute ecuația după valorile parametrului real m .

V. 20. Se da ecuația

$$|x + 2|^{\log_m \sqrt{x^2 + 4x + 4}} = 2m^2 - 3m + 1, x \neq -2, m \in \mathbb{R}.$$

a) Să se rezolve ecuația.

b) Să se determine valorile parametrului real m pentru care ecuația admite soluții.

V. 21. a) Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{\log_{2m^2-5m+3}(x^2 + 2mx)} = \sqrt{|\log_{2m^2-5m+3} 2|}, m \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right) \cup (2, +\infty).$$

b) Să se determine valorile parametrului real m pentru care ecuația admite soluții.

Să se rezolve inecuațiile:

V. 22. $\log_{x^2-x-2} \sqrt[9-x^2]{9-x^2} > 0.$

V. 23. $\log_a x + \log_{ax} x \geq 0, a > 0, a \neq 1.$

Să se rezolve sistemele de ecuații:

V. 24. $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 648, \\ 3^x \cdot 2^y = 432. \end{cases}$ V. 25. $\begin{cases} 3^{\cos 2x + \cos 2y} = 1, \\ 4^{\cos x + \cos y} = 2. \end{cases}$

V. 26. $\begin{cases} 16^{\sin^2 x + \cos^2 y} = 4, \\ \sin x + \cos y = 0. \end{cases}$ V. 27. $\begin{cases} x \sqrt{x-y} = y^4, \\ y \sqrt{x-y} = x. \end{cases}$

V. 28. $\begin{cases} 3^x + 4^y + 5^z = 16, \\ 9^x + 16^y + 25^z = 110, \\ 27^x + 64^y + 125^z = 862. \end{cases}$ V. 29. $\begin{cases} \sqrt{2^{x-y}} - \sqrt[4]{2^{x-y}} = 2, \\ 3^{\lg(2y-x)} = 1. \end{cases}$

V. 30. $\begin{cases} \frac{1}{\lg x} + \frac{1}{\lg y} = \frac{5}{6}, \\ \frac{\lg x}{\lg y} + \frac{\lg y}{\lg x} = \frac{13}{6}. \end{cases}$ V. 31. $\begin{cases} x(1 - \lg 5) = \lg(11 - 3^y), \\ \lg(85 - 4^x) = y \cdot \lg 9. \end{cases}$

V. 32. $\begin{cases} \log_a x + \log_{a^2} y = \frac{3}{2}, \\ \log_{b^2} x + \log_b y = \frac{3}{2}. \end{cases}$ V. 33. $\begin{cases} \log_a x - \log_{a^2} y = 1, \\ \log_{b^2} x - \log_b y = 1. \end{cases}$

V. 34. $\begin{cases} x^{\frac{1}{\ln y}} \cdot y^{\frac{1}{\ln x}} = e^2, \\ xy = e. \end{cases}$ V. 35. $\begin{cases} \log_3 \sqrt[4]{\frac{x^3}{y}} + \log_3 \sqrt[4]{\frac{y^3}{x}} = \frac{5}{3}, \\ x^2 + y^2 = 738. \end{cases}$

V. 36. $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2, \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2, \\ \log_4 z + \log_{16} y + \log_{16} x = 2. \end{cases}$

V. 37. $\begin{cases} 2^{\lg x} + 3^{\lg y} + 4^{\lg z} = 21, \\ 4^{\lg x} + 9^{\lg y} + 16^{\lg z} = 269, \\ 8^{\lg x} + 27^{\lg y} + 64^{\lg z} = 4131. \end{cases}$

Capitolul VI

NUMERE COMPLEXE

PROBLEME REZOLVATE

VI. 1. Să se determine două numere reale x și y astfel încât $(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$.

Rezolvare. Se scrie egalitatea dată sub forma:

$$(x + 3y) + (2x - 5y)i = 1 - 3i \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - 5y = -3 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{4}{11}, \quad y = \frac{5}{11}.$$

VI. 2. Să se arate că numărul $\frac{(a + ib)^2}{a - ib} + \frac{(a - ib)^2}{a + ib}$, $a, b \in R$ este real.

Rezolvare. Prin aducere la același numitor se obține:

$$\frac{(a + ib)^2}{a - ib} + \frac{(a - ib)^2}{a + ib} = \frac{(a + ib)^3 + (a - ib)^3}{(a - ib)(a + ib)} = \frac{2a(a^2 - 3b^2)}{a^2 + b^2}$$

Observație. Un număr z este real dacă $z = \bar{z}$, unde $\bar{z}$ este conjugatul numărului z . În cazul numărului dat în problemă, egalitatea $z = \bar{z}$ este evidentă.

VI. 3. Să se calculeze:

a) $\sqrt[3]{7 + i\sqrt{15}};$ b) $\sqrt[3]{2 - i11}.$

Rezolvare. a) Fie $x, y \in R$ astfel că $\sqrt[3]{7 + i\sqrt{15}} = x + iy$. Ridicând la pătrat se obține sistemul

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 7, \\ 2xy = \sqrt{15}, \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{15}}{2y}, \quad 4y^4 + 28y^2 - 15 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$y_{3,4} = \pm i \frac{\sqrt{30}}{2}.$$

Dar $y \in R \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \pm \frac{\sqrt{30}}{2}$ și $\sqrt[3]{7 + i\sqrt{15}} = \pm \left(\frac{\sqrt{30}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$

b) Fie $x, y \in R$ astfel că $\sqrt[3]{2 - i11} = x + iy$. Ridicând la cub se obține sistemul

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 2, \\ y^3 - 3x^2y = 11. \end{cases}$$

Înlocuind $x = ty$ și împărțind ecuațiile, membru cu membru, se obține

$$\frac{t^3 - 3t}{1 - 3t^2} = \frac{2}{11} \Rightarrow 11t^3 + 6t^2 - 33t - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t + 2)(11t^2 - 16t - 1) = 0 \Rightarrow t_1 = -2, \quad t_{2,3} = \frac{8 \pm 5\sqrt{3}}{11}.$$

Rezultă

$$t_1 = -2, \quad y_1 = -1, \quad x_1 = 2; \quad t_{2,3} = \frac{8 \pm 5\sqrt{3}}{11}, \quad y_{2,3} = -\frac{11}{\sqrt[3]{18 \pm 80\sqrt{3}}},$$

$$x_{2,3} = -\frac{8 \pm 5\sqrt{3}}{\sqrt[3]{18 \pm 80\sqrt{3}}}.$$

Deci

$$\sqrt[3]{2 - i11} = z_k (k = 1, 2, 3) \text{ cu } z_1 = 2 - i, \quad z_2 = -\frac{8 + 5\sqrt{3}}{\sqrt[3]{18 + 80\sqrt{3}}} -$$

$$-i \cdot \frac{11}{\sqrt[3]{18 + 80\sqrt{3}}}, \quad z_3 = -\frac{8 - 5\sqrt{3}}{\sqrt[3]{18 - 80\sqrt{3}}} - i \cdot \frac{11}{\sqrt[3]{18 - 80\sqrt{3}}}.$$

VI. 4. Din înmulțirea numerelor $a + ib$ și $x + iy$ să se deducă relația:

$$\arctg \frac{b}{a} + \arctg \frac{y}{x} = \arctg \frac{bx + ay}{ax - by}.$$

Rezolvare. $(a + ib)(x + iy) = ax - by + i(bx + ay)$. Dar argumentul produsului a două sau mai multe numere complexe este egal cu suma argumentelor factorilor, adică

$$\arg [(a + ib)(x + iy)] = \arg(a + ib) + \arg(x + iy). \quad (1)$$

Însă

$$\arg(a + ib) = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}, \quad \arg(x + iy) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (2)$$

și

$$\arg [(a + ib)(x + iy)] = \arg(ax - by + i(bx + ay)) = \operatorname{arctg} \frac{bx + ay}{ax - by}. \quad (3)$$

Înlocuind în relația (1) valorile din (2) și (3) se obține relația din enunț.

VI. 5. Fie numărul complex $z = \frac{1 + it}{1 - it}$, unde t este un număr real. Să se exprime t în funcție de argumentul numărului dat.

Rezolvare. Argumentul cîtilui a două numere complexe este diferența dintre argumentul numărătorului și argumentul numitorului. Deci

$$\arg z = \arg(1 + it) - \arg(1 - it) \Rightarrow \arg z = \operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg}(-t) \Rightarrow \\ \Rightarrow t = \operatorname{tg} \frac{\arg z}{2}$$

VI. 6. Fie z_1 și z_2 două numere complexe diferite între ele și $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ conjugatele lor. Să se arate că numărul $z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2$ este pur imaginar.

Rezolvare. Fie $z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2$. În acest caz $z_1 \cdot \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2) - (a_1 - ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(b_1 a_2 - a_1 b_2) - a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(b_1 a_2 - a_1 b_2) = 2i(b_1 a_2 - a_1 b_2)$.

Observație. Un număr complex z este pur imaginar dacă $z = -\bar{z}$. Rezultă: $z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 = \bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2 = -(z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2)$.

VI. 7. Să se arate că dacă z_1 și z_2 sînt două numere complexe diferite între ele, atunci:

$$\operatorname{Re} \left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \right) = \frac{|z_1|^2 - |z_2|^2}{|z_1 - z_2|^2}, \quad \operatorname{Im} \left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \right) = i \frac{z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2}{|z_1 - z_2|^2},$$

unde $\bar{z}$ este conjugatul numărului complex z .

Rezolvare. Se folosesc următoarele proprietăți:

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2} (z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i} (z - \bar{z}).$$

Dar

$$\left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \right) = \frac{\overline{(z_1 + z_2)}}{\overline{(z_1 - z_2)}} = \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2},$$

$$\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} + \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_1 - z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 - z_2 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \bar{z}_1 + \bar{z}_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_2 \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \bar{z}_2}{(z_1 - z_2) \cdot (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}$$

Deci

$$\operatorname{Re} \left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} + \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} \right) = \frac{|z_1|^2 - |z_2|^2}{|z_1 - z_2|^2};$$

$$\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} - \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_1 - z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 - z_2 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 \bar{z}_1 - \bar{z}_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_2 \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \bar{z}_2}{(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}$$

și

$$\operatorname{Im} \left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \right) = \frac{1}{2i} \cdot \left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} - \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} \right) = i \frac{z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2}{|z_1 - z_2|^2}$$

VI. 8. Dacă z_1 și z_2 sînt numere complexe oarecare, să se verifice identitatea

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Care este semnificația geometrică a acestei identități?

Rezolvare.

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = \\ = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Semnificația geometrică este însuși teorema: Într-un paralelogram suma pătratelor diagonalelor este egală cu suma pătratelor laturilor.

VI. 9. Fie z_1 și z_2 două numere complexe și $z = \sqrt{z_1 z_2}$. Să se arate că

$$|z_1| + |z_2| = \left| \frac{z_1 + z_2}{2} + z \right| + \left| \frac{z_1 + z_2}{2} - z \right|.$$

Rezolvare. Să calculăm

$$E = \left(\left| \frac{z_1 + z_2}{2} + z \right| + \left| \frac{z_1 + z_2}{2} - z \right| \right)^2.$$

$$E = \left| \frac{z_1 + z_2}{2} + z \right|^2 + \left| \frac{z_1 + z_2}{2} - z \right|^2 + 2 \left| \frac{z_1 + z_2}{2} + z \right| \cdot \left| \frac{z_1 + z_2}{2} - z \right| = \\ = \left(\frac{z_1 + z_2}{2} + z \right) \left(\frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{2} + \bar{z} \right) + \left(\frac{z_1 + z_2}{2} - z \right) \left(\frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{2} - \bar{z} \right) + 2 \cdot \left| \left(\frac{z_1 + z_2}{2} \right)^2 - z^2 \right| = \\ = 2 \cdot \left| \frac{z_1 + z_2}{2} \right|^2 + 2 \cdot |z|^2 + 2 \cdot \left| \left(\frac{z_1 - z_2}{2} \right)^2 \right| = \frac{|z_1 + z_2|^2}{2} + 2 \cdot |z_1 z_2| + \\ + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2} = |z_1|^2 + 2|z_1 z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2.$$

Deci

$$\sqrt{E} = \left| \frac{z_1 + z_2}{2} + z \right| + \left| \frac{z_1 + z_2}{2} - z \right| = |z_1| + |z_2|.$$

VI. 10. Să se arate că

$$(1 + i\sqrt{3})(1 + i)(\cos \varphi + i \sin \varphi) = 2\sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{7\pi}{12} + \varphi \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{12} + \varphi \right) \right].$$

Rezolvare. Se scriu numerele complexe $1 + i\sqrt{3}$ și $1 + i$ sub formă trigonometrică. Se știe că $z = a + ib = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, unde $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ este modulul numărului complex, iar φ este argumentul numărului complex, dat de $\cos \varphi = \frac{a}{\rho}$, $\sin \varphi = \frac{b}{\rho}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Se obține

$$1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right), \quad 1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

$$(1 + i\sqrt{3})(1 + i)(\cos \varphi + i \sin \varphi) = 2\sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \varphi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \varphi \right) \right] = 2\sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{7\pi}{12} + \varphi \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{12} + \varphi \right) \right].$$

VI. 11. Să se determine unghiul α astfel ca expresia

$$E = \left[\frac{1 - i\sqrt{3}}{2(\sin \alpha + i \cos \alpha)} \right]^6$$

să fie reală și strict pozitivă.

Rezolvare.

$$\frac{1 - i\sqrt{3}}{2(\sin \alpha + i \cos \alpha)} = \frac{2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)}{2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right]} = \cos \left(\frac{7\pi}{6} + \alpha \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{6} + \alpha \right)$$

$$E = \cos 6 \left(\frac{7\pi}{6} + \alpha \right) + i \sin 6 \left(\frac{7\pi}{6} + \alpha \right)$$

Expresia este reală și strict pozitivă dacă

$$\begin{cases} \sin 6 \left(\frac{7\pi}{6} + \alpha \right) = 0 \\ \cos 6 \left(\frac{7\pi}{6} + \alpha \right) > 0 \end{cases} \Rightarrow 6 \left(\frac{7\pi}{6} + \alpha \right) = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

de unde $\alpha = \frac{k\pi}{3} - \frac{7\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$ pentru care $E = 1$.

VI. 12. Să se calculeze $(1 + z)^n$, unde $z = \cos \alpha - i \sin \alpha$.

Rezolvare. Se scrie $1 + z$ sub formă trigonometrică:

$$\rho = \sqrt{(1 + \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha} = 2 \cos \frac{\alpha}{2}, \quad \cos \varphi = \frac{1 + \cos \alpha}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} = \cos \frac{\alpha}{2},$$

$$\sin \varphi = -\frac{\sin \alpha}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} = -\sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \varphi = -\frac{\alpha}{2} \text{ și } 1 + z = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left[\cos \left(-\frac{\alpha}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\alpha}{2} \right) \right] \Rightarrow (1 + z)^n = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \cdot \left[\cos \left(-\frac{n\alpha}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{n\alpha}{2} \right) \right].$$

VI. 13. Să se calculeze

$$\sqrt[6]{\frac{1 - i}{\sqrt{3} + i}}.$$

Rezolvare. Se scriu numerele $1 - i$ și $\sqrt{3} + i$ sub formă trigonometrică:

$$1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right), \quad \sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right),$$

$$z = \sqrt[6]{\frac{1 - i}{\sqrt{3} + i}} = \sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right)} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} + 2k\pi \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$k = 0, \quad z_0 = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \cdot \left(\cos \frac{19\pi}{72} + i \sin \frac{19\pi}{72} \right); \quad k = 1, \quad z_1 = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \cdot \left(\cos \frac{43\pi}{72} + i \sin \frac{43\pi}{72} \right) \text{ etc.}$$

VI. 14. Să se arate că

$$1 + \cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \dots + \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$$

și

$$\sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{4\pi}{n} + \dots + \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} = 0.$$

Rezolvare. Se știe că rădăcinile de ordin n ale unității se obțin rezolvând ecuația binomă $x^n = 1$ și sint date de

$$x_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Folosind relațiile între rădăcini și coeficienți, se vede că suma rădăcinilor este nulă prin urmare

$$1 + \cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \dots + \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{4\pi}{n} + \dots + \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} = 0 + i \cdot 0,$$

de unde, conform egalității numerelor complexe, rezultă relațiile din problemă.

VI. 15. Să se calculeze sumele:

$$S_1 = \cos x : \cos x + \cos^2 x \cdot \cos 2x + \cos^3 x \cdot \cos 3x + \dots + \cos^n x \cdot \cos nx;$$

$$S_2 = \cos x \cdot \sin x + \cos^2 x \cdot \sin 2x + \cos^3 x \cdot \sin 3x + \dots + \cos^n x \cdot \sin nx.$$

Rezolvare. Înmulțind a doua sumă cu i și adunând-o la prima se obține:

$$S_1 + iS_2 = \cos x(\cos x + i \sin x) + \cos^2 x(\cos 2x + i \sin 2x) + \dots + \cos^n x(\cos nx + i \sin nx)$$

sau, folosind formula lui Moivre se obține

$$S_1 + iS_2 = \cos x(\cos x + i \sin x) + \cos^2 x(\cos x + i \sin x)^2 + \dots + \dots + \cos^n x(\cos x + i \sin x)^n$$

(1)

Dar (1) reprezintă suma unei progresii geometrice cu rația $\cos x(\cos x + i \sin x)$ și deci

$$S_1 + iS_2 = \frac{\cos x(\cos x + i \sin x)[\cos^n x(\cos x + i \sin x)^n - 1]}{\cos x(\cos x + i \sin x) - 1}. \quad (2)$$

Numitorul se scrie: $\cos^2 x + i \sin x \cdot \cos x - 1 = i \sin x(\cos x + i \sin x)$.

Deci $S_1 + iS_2 = -i \cotg x[\cos^n x(\cos x + i \sin x)^n - 1]$.

Ținând seama din nou de formula lui Moivre, se obține

$$S_1 + iS_2 = -i(\cotg x \cos^n x \cos nx - \cotg x) + \cos^n x \cdot \sin nx \cdot \cotg x. \quad (3)$$

Din (3) rezultă $S_1 = \cotg x \cdot \cos^n x \cdot \sin nx$ și $S_2 = \cotg x(1 - \cos^n x \cdot \cos nx)$.

VI. 16. Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} (3-i)x + (2-i)y = m(1+3i), \\ (2+i)x + (1+2i)y = 1-i, \end{cases}$$

cu $m \in R$ și x, y — numere complexe;

a) să se rezolve sistemul;

b) să se arate că oricare ar fi $m \in R$ sistemul nu poate admite soluții reale sau pur imaginare.

Rezolvare. a) Rezolvind prin metoda reducerii se obține

$$x = \frac{m(1+3i)(1+2i) - (1-i)(2-i)}{(3-i)(1+2i) - (2+i)(2-i)} = m + \frac{3}{5} + i\left(m + \frac{1}{5}\right),$$

$$y = \frac{(1-i)(3-i) - m(1+3i)(2+i)}{(3-i)(1+2i) - (2+i)(2-i)} = -\frac{7m+4}{5} - i \cdot \frac{m+2}{5}.$$

b) Soluțiile sint reale dacă au loc ecuațiile simultane

$$\begin{cases} m + \frac{1}{5} = 0, \\ \frac{m+2}{5} = 0, \end{cases} \Rightarrow \text{imposibil.}$$

Soluțiile sistemului sint numere pur imaginare, dacă avem simultan

$$\begin{cases} m + \frac{3}{5} = 0, \\ -\frac{7m+4}{5} = 0, \end{cases} \Rightarrow \text{imposibil.}$$

VI. 17. Să se rezolve ecuația:

$$|z| - z = 1 + 2i.$$

Rezolvare. Fie $z = u + iv$ cu $u, v \in \mathbb{R}$; rezultă •

$$\begin{aligned} \sqrt{u^2 + v^2} - u - iv &= 1 + 2i \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{u^2 + v^2} - u = 1 \\ v = -2 \end{cases} \Rightarrow u^2 + 4 = \\ &= u^2 + 2u + 1 \Rightarrow u = \frac{3}{2} \text{ și deci } z = \frac{3}{2} - 2i. \end{aligned}$$

VI. 18. Să se rezolve ecuația

$$(2 + i)z^2 - (4 - i)z + 1 - i = 0.$$

Rezolvare. Se aplică formula de rezolvare a ecuației de gradul al doilea care este adevărată și pentru ecuația cu coeficienți complecși:

$$z_{1,2} = \frac{4 - i \pm \sqrt{(4 - i)^2 - 4(2 + i)(1 - i)}}{2(2 + i)} \Rightarrow z_{1,2} = \frac{4 - i \pm \sqrt{3 - 4i}}{2(2 + i)}.$$

Se calculează $\sqrt{3 - 4i}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{3 - 4i} = x + iy \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = -2 \end{cases} \Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{3 \pm 5}{2} \text{ și deoarece } \\ x \in \mathbb{R}, x^2 > 0, \text{ adică } x = \pm 2 \text{ și } y = \mp 1 \text{ astfel că } \sqrt{3 - 4i} = 2 - i. \end{aligned}$$

$$z_1 = \frac{4 - i + 2 - i}{2(2 + i)} = \frac{3 - i}{2 + i} = \frac{(3 - i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = 1 - i,$$

$$z_2 = \frac{4 - i - 2 + i}{2(2 + i)} = \frac{1}{2 + i} = \frac{2 - i}{5}.$$

VI. 19. Se da ecuația

$$mz^2 - 2(2 + i)z - 1 + 2i = 0$$

cu m — un parametru.

a) Să se determine valorile parametrului m pentru care ecuația admite rădăcini egale. Să se rezolve în acest caz ecuația.

b) Să se determine valorile reale ale parametrului m pentru care ecuația admite o rădăcină reală.

Rezolvare. a) Ecuația admite rădăcini egale dacă discriminantul este egal cu zero adică:

$$(2 + i)^2 + m(1 - 2i) = 0 \Rightarrow m = -\frac{3 + 4i}{1 - 2i} = 1 - 2i.$$

Pentru $m = 1 - 2i$ ecuația se scrie

$$(1 - 2i)z^2 - 2(2 + i)z - 1 + 2i = 0 \Rightarrow z_1 = z_2 = i.$$

b) Dacă $m \in \mathbb{R}$ atunci

$$z_{1,2} = \frac{2 + i \pm \sqrt{3 + m + 2i(2 - m)}}{m}.$$

Ecuația admite o rădăcină reală dacă $\sqrt{3 + m + 2i(2 - m)} = a + i$ cu $a \in \mathbb{R}$. Ridicând la pătrat se obține sistemul

$$\begin{cases} a^2 - 1 = 3 + m, \\ a = 2 - m, \end{cases} \Rightarrow m_1 = 0, a_1 = 2; m_2 = 5, a_2 = -3.$$

Pentru $m_1 = 0$, ecuația se scrie

$$2(2 + i)z + 1 - 2i = 0 \Rightarrow z = \frac{i}{2} \text{ (nu satisface condiția cerută)}$$

Pentru $m_2 = 5$, ecuația se scrie

$$5z^2 - 2(2 + i)z - 1 + 2i = 0 \Rightarrow z_1 = 1, z_2 = \frac{-1 + 2i}{5}.$$

VI. 20. Să se rezolve ecuația

$$iz^4 + (1 - i)z^2 - 1 = 0$$

Rezolvare. Se rezolvă ecuația bipătrată în z :

$$z^2 = \frac{-(1 + i) \pm \sqrt{2i + 4i}}{2i} = \frac{-(1 + i) \pm \sqrt{6i}}{2i}.$$

Dar

$$\sqrt{6i} = x + iy \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ xy = 3 \end{cases} \Rightarrow x = y = \sqrt{3} \text{ și } \sqrt{6i} = \sqrt{3}(1 + i).$$

Rezultă ecuațiile binome

$$z^2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}(-1 + i); \quad (1) \quad z^2 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 - i). \quad (2)$$

Dar $-1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ astfel că din (1) se obține

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow z &= \sqrt{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}} \left(\cos \frac{2k\pi + \frac{3\pi}{4}}{2} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{3\pi}{4}}{2} \right) \quad k = 0, 1. \end{aligned}$$

$$k = 0: z_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}} \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right);$$

$$k = 1: z_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}} \left(\cos \frac{11\pi}{8} + i \sin \frac{11\pi}{8} \right).$$

Analog, din (2) se obține

$$z = \sqrt{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}} \left(\cos \frac{2k\pi + \frac{7\pi}{4}}{2} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{7\pi}{4}}{2} \right), \quad k = 0, 1.$$

$$k = 0; z_3 = \sqrt{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}} \left(\cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8} \right);$$

$$k = 1: z_4 = \sqrt{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}} \left(\cos \frac{15\pi}{8} + i \sin \frac{15\pi}{8} \right).$$

VI. 21. Să se rezolve ecuația

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz} \right)^n = a, \quad |a| = 1.$$

Rezolvare. Deoarece $|a| = 1$ se scrie $a = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Dar $\frac{1+iz}{1-iz} = \frac{i-z}{i+z}$, astfel că

$$\frac{i-z}{i+z} = \sqrt[n]{a} \quad (1)$$

cu

$$\sqrt[n]{a} = \cos \frac{2k\pi + \varphi}{n} + i \sin \frac{2k\pi + \varphi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (2)$$

Din (1) se obține

$$z = \frac{i(1 - \sqrt[n]{a})}{1 + \sqrt[n]{a}} = \frac{\sin \alpha + i(1 - \cos \alpha)}{1 + \cos \alpha + i \sin \alpha}, \quad \alpha = \frac{2k\pi + \varphi}{n}. \quad (3)$$

Se scriu numerele $x_1 = \sin \alpha + i(1 - \cos \alpha)$ și $x_2 = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$ sub formă trigonometrică:

$$x_1 = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right),$$

$$x_2 = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$\text{Deci } z = \frac{x_1}{x_2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad \text{adică } z = \operatorname{tg} \frac{2k\pi + \varphi}{2n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

VI. 22. Să se determine regiunea planului complex $z = x + iy$ în care este adevărată relația

$$|z - 2i| \leq 1. \quad (1)$$

Rezolvare. Înlocuind $z = x + iy$ în inecuație se obține

$$|x + iy - 2i| \leq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y-2)^2} \leq 1 \Rightarrow x^2 + (y-2)^2 \leq 1.$$

Dar $x^2 + (y-2)^2 = 1$ este ecuația unui cerc cu centrul în $C(0, i \cdot 2)$ și de rază 1. Prin urmare relația (1) este satisfăcută de punctele din interiorul cercului (inclusiv cercul) de centru $(0, i \cdot 2)$ și rază 1.

VI. 23. Să se determine regiunea planului complex $z = x + iy$ în care este adevărată inegalitatea

$$\left| \frac{2z}{1+z^2} \right| < 1.$$

Rezolvare. Înlocuind $z = x + iy$ se obține:

$$\frac{2\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}} < 1 \Rightarrow x^4+y^4+2x^2y^2-2x^2-6y^2+1 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [x^2+(y+1)^2-2] \cdot [x^2+(y-1)^2-2] > 0$$

echivalentă cu

$$x^2+(y+1)^2-2 > 0 \quad \text{și} \quad x^2+(y-1)^2-2 > 0 \quad (1)$$

sau

$$x^2+(y+1)^2-2 < 0 \quad \text{și} \quad x^2+(y-1)^2-2 < 0. \quad (2)$$

Inecuațiile (1) sînt satisfăcute de punctele din exteriorul cercurilor $x^2+(y+1)^2-2=0$ și $x^2+(y-1)^2-2=0$, iar inecuațiile (2) sînt satisfăcute de punctele din interiorul acestor cercuri.

VI. 24. Să se determine domeniul planului complex $z = x + iy$ în care

$$\frac{\pi}{4} < \arg(z - 3i) < \frac{\pi}{3},$$

Rezolvare. Făcînd transformarea $X = x, iY = i(y-3)$; atunci $z - 3i = x + (y-3)i = X + iY = Z$. Relația $\frac{\pi}{4} < \arg Z < \frac{\pi}{3}$ este satisfăcută de punctele din planul complex $Z = X + iY$ care formează domeniul unghiular dintre semidreptele care pornesc din originea sistemului ortogonal $XO_1(iY)$ și care fac cu axa O_1X respectiv unghiurile $\frac{\pi}{4}$ și $\frac{\pi}{3}$ (fig. VI. 24).

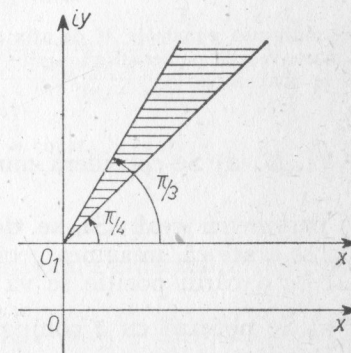


Fig. VI.24

Prin urmare, domeniul planului complex $z = x + iy$ în care are loc inegalitatea $\frac{\pi}{4} < \arg(z - 3i) < \frac{\pi}{3}$ este regiunea din interiorul unghiului format de semidreptele care pornesc din punctul $(0, 3i)$ și fac cu direcția pozitivă a axei reale unghiuri egale respectiv cu $\frac{\pi}{4}$ și $\frac{\pi}{3}$.

VI. 25. Să se determine locul geometric al punctelor din planul complex $z = x + iy$ pentru care

$$z^2 + \bar{z}^2 + 2m(1 - i) \cdot |z|^2 - 2i = 0,$$

unde m este un parametru real.

Rezolvare. Înlocuind $z = x + iy$ se obține sistemul

$$\begin{cases} 2(x^2 - y^2) + 2m(x^2 + y^2) = 0, \\ -2m(x^2 + y^2) - 2 = 0, \end{cases}$$

din care, eliminând parametrul m , se găsește ecuația locului geometric

$$x^2 - y^2 - 1 = 0 \quad (\text{hiperbolă}).$$

VI. 26. Să se determine, în planul complex, mulțimea punctelor M de afix z , astfel ca imaginile numerelor 1 , z și $1 + z^2$ să fie coliniare.

Rezolvare. Fie A, M, N punctele de afixe $1, z$ și $1 + z^2$ adică $A(1, i0)$, $M(x, iy)$, $N(x^2 - y^2 + 1, i2xy)$. Folosind condiția de coliniaritate a trei puncte se obține

$$\begin{vmatrix} 1 & i0 & 1 \\ x & iy & 1 \\ x^2 - y^2 + 1 & i2xy & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow i \cdot \begin{vmatrix} x - 1 & y \\ x^2 - y^2 & 2xy \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0 \quad (\text{cerc}).$$

Deci mulțimea punctelor M de afix z pentru care imaginile numerelor $1, z, 1 + z^2$ sînt coliniare, se află pe cercul $x^2 + y^2 - 2x = 0$ de centrul $(1, i0)$ și rază 1 . Ecuația cercului se mai scrie

$$|z|^2 - (z + \bar{z}) = 0.$$

VI. 27. a) Se consideră numărul complex $z = \frac{1 + mi}{1 - mi}$, unde m este

un parametru real. Să se determine modulul numărului complex z și să se arate că, imaginea geometrică M a numărului complex z descrie un cerc a cărui poziție se va preciza.

b) Se notează cu $\bar{z}$ conjugatul lui z ; să se demonstreze relația

$$z^n + \bar{z}^n = 2 \cos(2n \operatorname{arctg} m).$$

c) Să se arate că, pentru două valori m_1 și m_2 ale parametrului m , legate prin relația $\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = k$ (constant), distanța dintre imaginile geometrice corespunzătoare este constantă.

Rezolvare. a) $|z| = \left| \frac{1 + mi}{1 - mi} \right| = \frac{|1 + mi|}{|1 - mi|} = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{\sqrt{1 + m^2}} = 1 \Rightarrow |z| = 1$ este ecuația unui cerc cu centrul în originea axelor de coordonate și de rază 1 ($|z| = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$).

b) Se scrie numărul complex z sub formă trigonometrică.

$$z = \frac{1 - m^2}{1 + m^2} + i \frac{2m}{1 + m^2} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2m}{1 - m^2},$$

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{2m}{1 - m^2} \Rightarrow m = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi = 2 \operatorname{arctg} m.$$

$$\bar{z} = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi),$$

$$z^n + \bar{z}^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi + \cos(-n\varphi) + i \sin(-n\varphi) = 2 \cos n\varphi = 2 \cos(2n \operatorname{arctg} m).$$

c) Distanța dintre două puncte M_1 de afix z_1 și M_2 de afix z_2 este:

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \\ |z_1 - z_2| &= \left| \frac{1 + m_1 i}{1 - m_1 i} - \frac{1 + m_2 i}{1 - m_2 i} \right| = \left| \frac{2i(m_1 - m_2)}{(1 - m_1 m_2) - i(m_1 + m_2)} \right| = \\ &= 2 \frac{|m_1 - m_2|}{|(1 - m_1 m_2) - i(m_1 + m_2)|} = 2 \sqrt{\frac{(m_1 - m_2)^2}{(1 - m_1 m_2)^2 + (m_1 + m_2)^2}} = \\ &= 2 \cdot \sqrt{\frac{(m_1 - m_2)^2}{(1 + m_1 m_2)^2 + (m_1 - m_2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{(1 + m_1 m_2)^2 + (m_1 - m_2)^2}{(m_1 - m_2)^2}}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{k^2} + 1}} = \frac{2|k|}{\sqrt{1 + k^2}} = \text{const.} \end{aligned}$$

VI. 28. Se dă ecuația $z^4 - 2mz^2 + 2m^2 + n^2 = 0$ cu $m, n \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că oricare ar fi m, n , imaginile rădăcinilor reprezintă vîrfurile unui dreptunghi.

b) Să se rezolve ecuația pentru $m = \frac{1}{2}$, $n = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ și să se reprezinte imaginile rădăcinilor.

c) Să se găsească m astfel ca dreptunghiul de la punctul a) să fie un pătrat, a cărui latură să se calculeze.

Rezolvare.

a) $z_{1,2} = \pm \sqrt{m + i\sqrt{m^2 + n^2}}$; $z_{3,4} = \pm \sqrt{m - i\sqrt{m^2 + n^2}}$.
Fie, în general, două numere complexe conjugate: $p + iq = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $p - iq = r[\cos(2\pi - \alpha) + i \sin(2\pi - \alpha)]$. Rădăcinile pătrate din aceste numere au modulul $\sqrt{r}$ și argumentele $\frac{\alpha}{2}$ și $\pi + \frac{\alpha}{2}$ pentru $\sqrt{p + iq}$ și $\pi - \frac{\alpha}{2}$ și $2\pi - \frac{\alpha}{2}$ pentru $\sqrt{p - iq}$; deci imaginile rădăcinilor pătrate a două numere complexe conjugate reprezintă vîrfurile unui dreptunghi cu centrul în O și cu laturile paralele cu axele (fig. VI. 28).

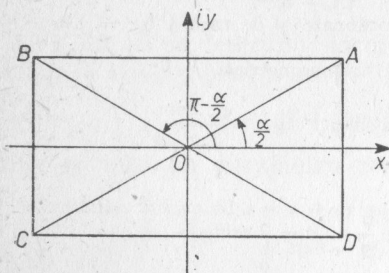


Fig. VI.28

b) Pentru $m = \frac{1}{2}$, $n = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ se obține:

$$z_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \cos \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{2},$$

$$k = 0, 1 \Rightarrow z_1 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2},$$

$$z_2 = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2};$$

$$z_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow z_3 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2},$$

$$z_4 = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}.$$

Dreptunghiul are vîrfurile: $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, i \cdot \frac{1}{2}\right)$; $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, i \cdot \frac{1}{2}\right)$;

$C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -i \cdot \frac{1}{2}\right)$; $D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -i \cdot \frac{1}{2}\right)$ (fig. VI. 28) cu $|\overline{OA}| = 1$.

c) $ABCD$ este un pătrat dacă diagonalele sînt perpendiculare, adică $\pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$ cu $\alpha = \arg(m + i\sqrt{m^2 + n^2}) \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{m}$ și deci $m = 0$. Pentru $m = 0$ rădăcinile ecuației sînt:

$$z_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{|n|}{2}} (1 + i); z_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{|n|}{2}} (1 - i) \Rightarrow l_4 = 2\sqrt{|n|}.$$

PROBLEME PROPUSE

Să se calculeze:

VI. 1. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2n}$. VI. 2. $(1+i)^{6n} - (1-i)^{6n}$.

Pentru ce valori reale ale lui x și y au loc egalitățile:

VI. 3. $(1+2i)x + (3-5i)y = 1-3i$

VI. 4. $\frac{x-2}{1-i} + \frac{(y-3)i}{1+i} = 1+i$.

VI. 5. Să se determine numărul complex $x + iy$ astfel ca $y + ix$ să fie una din rădăcinile lui pătrate.

Să se calculeze:

VI. 6. $\sqrt{-7+24i}$; VI. 7. $\sqrt{\frac{27+31i}{10-30i}}$;

VI. 8. $\sqrt[3]{1+i}$; VI. 9. $\sqrt{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$.

VI. 10. Să se rezolve următorul sistem, considerînd că x, y, z, t , sînt numere reale:

$$\begin{cases} (1+i)x + (1+2i)y + (1+3i)z + (1+4i)t = 1+5i, \\ (3-i)x + (4-2i)y + (1+i)z + 4it = 2-i. \end{cases}$$

Să se determine numărul complex z astfel ca să aibă loc egalitățile:

VI. 11. $z\bar{z} + 2(z - \bar{z}) = 20 + 8i$; VI. 12. $|z| \cdot \bar{z} - 2(\bar{z} + z) = 3 + 20i$.

Să se scrie sub forma $a + ib$ expresiile:

VI. 13. $\frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos \alpha - i \sin \alpha}$; VI. 14. $\frac{1}{\cos \alpha + i \sin \alpha}$;

VI. 15. $\left(\frac{1 + \sin \alpha + i \cos \alpha}{1 + \sin \alpha - i \sin \alpha} \right)^n, \quad n \in N;$

VI. 16. $\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^n + \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right)^n, \quad n \in N,$

Să se scrie sub formă trigonometrică următoarele numere:

VI. 17. $-\sqrt{2} + i\sqrt{2};$ VI. 18. $-\sin \alpha + i \cdot \cos \alpha;$

VI. 19. $1 - \sin \alpha + i \cos \alpha;$ VI. 20. $1 + \cos \alpha + i \sin \alpha;$

VI. 21. $1 - \cos \alpha + i \sin \alpha;$ VI. 22. $1 + \sin \alpha + i \sin \alpha;$

VI. 23. Dacă $|z| = 1$, să se arate că $\frac{z^n}{1 + z^{2n}}$ este real;

VI. 24. Dacă $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$ să se arate că

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\theta.$$

VI. 25. Fie $z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7};$ se notează $S = z + z^2 + z^4$ și

$T = z^3 + z^5 + z^6.$ Să se calculeze $S + T$ și $S \cdot T.$

VI. 26. Să se găsească toate numerele complexe care verifică relația $\bar{z} = z^{n-1}.$

Să se rezolve ecuațiile:

VI. 27. $|z| + z = 2 + i;$ VI. 28. $|z| + \bar{z} = \frac{1}{2} + i;$

VI. 29. $z^2 + (5 - 2i)z + 5(1 - i) = 0;$

VI. 30. $z^2 - (7 + 3i)z + 10 + 11i = 0;$

VI. 31. $(1 - i)z^2 + (4 + 3i)z - 12 - 11i = 0;$

VI. 32. $z^6 - z^3 + 1 = 0;$

VI. 33. Se dă ecuația

$$z^2 + (1 - 2i)z + m - 2i = 0$$

cu m — un parametru.

a) Să se determine valorile parametrului m pentru care ecuația admite rădăcini egale; să se rezolve în acest caz ecuația.

b) Presupunând $m \in R$, să se determine valorile lui m pentru care ecuația admite o rădăcină reală.

VI. 34. Să se determine domeniul planului complex $z = x + iy$ pentru care au loc relațiile:

a) $3 < |z| < 4;$ b) $\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{2};$

c) $|z + i| \leq 2;$ d) $|z| = |z - 1 - i|.$

VI. 35. Să se afle locul geometric al punctelor $z = x + iy$, astfel ca expresia $E = \left(\frac{z-1}{z+2} \right)^2$ să fie reală.

VI. 36. Să se demonstreze că punctele de afixe z_1, z_2, z sînt coliniare dacă $\frac{z-z_1}{z-z_2}$ este un număr real.

VI. 37. Să se afle locul geometric al punctului M de afix z , astfel ca imaginile numerelor i, z, iz să fie coliniare.

VI. 38. Să se afle locul geometric al punctelor $z = x + iy$ pentru care $z^2 + miz - 1 = 0$, m fiind un parametru real.

VI. 39. Fie z_k și $\bar{z}_k (k = 1, 2, 3)$ numere complexe conjugate.

a) Să se arate că numărul $z = z_1 \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_3$ este real.

b) Știind că imaginile numerelor complexe z_1, z_2, z_3 în planul complex sînt situate pe aceeași paralelă la axa imaginară și că $z_1 \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_3 = 0$ să se afle relația dintre modulele lor.

VI. 40. Se dau numerele complexe $z_1 = \frac{1+im}{1-im}$ și $z_2 = \frac{m+i}{m-i}$, unde m este un parametru real.

a) Să se arate că imaginile acestor numere complexe în planul complex $z = x + iy$ se află pe același cerc cu centrul în originea axelor de coordonate. Să se precizeze poziția acestor imagini față de axe.

b) Să se arate că are loc relația:

$$z_1^{2n} + z_2^{2n} = \bar{z}_1^{2n} + \bar{z}_2^{2n},$$

cu $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ conjugatele numerelor $z_1, z_2.$

Capitolul VII

ANALIZĂ COMBINATORIE

PROBLEME REZOLVATE

VII. 1. Fie mulțimile $E = \{1, 2, 3\}$ și $F = \{a, b, c, d\}$.

- a) Care este numărul de aplicații din E în F și câte sînt injective?
 b) Care este numărul de aplicații din F în E și câte sînt surjective?
 Dar bijective?

Rezolvare. a) Sînt posibile următoarele aplicații f din E în F :

$$f: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

în care stelutele se înlocuiesc pe rînd prin grupele (a, a, a) , (b, b, b) , (c, c, c) , (d, d, d) , prin grupele de trei elemente care se obțin ca rezultat al permutărilor cu repetiție ale elementelor din următoarele grupe: (a, a, b) , (a, a, c) , (a, a, d) , (b, b, a) , (b, b, c) , (b, b, d) , (c, c, a) , (c, c, b) , (c, c, d) , (d, d, a) , (d, d, b) , (d, d, c) și prin grupele de trei elemente care se obțin ca rezultat al permutărilor elementelor din următoarele grupe: (a, b, c) , (a, b, d) , (a, c, d) , (b, c, d) . În total sînt $4 + 12 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 64$ aplicații f din E în F dintre care $A_3^3 = 24$ aplicații sînt injective [aplicațiile pentru care stelutele se înlocuiesc prin grupe de trei elemente care se obțin ca rezultat al permutărilor elementelor din următoarele grupe: (a, b, c) , (a, b, d) , (a, c, d) , (b, c, d)].

b) Aplicațiile g din F în E sînt de forma:

$$g: \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

în care stelutele se înlocuiesc pe rînd prin grupele $(1, 1, 1, 1)$, $(2, 2, 2, 2)$, $(3, 3, 3, 3)$, prin grupele de patru elemente care se obțin ca rezultat al permutărilor cu repetiție ale elementelor din următoarele grupe: $(1, 1, 1, 2)$, $(1, 1, 1, 3)$, $(2, 2, 2, 1)$, $(2, 2, 2, 3)$, $(3, 3, 3, 1)$, $(3, 3, 3, 2)$, $(1, 1, 2, 2)$, $(1, 1, 3, 3)$, $(2, 2, 3, 3)$, $(1, 1, 2, 3)$, $(2, 2, 1, 3)$, $(3, 3, 1, 2)$. În total

sînt $3 + 6 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 12 = 81$ aplicații g din F în E , din care sînt surjective 36 aplicații [aplicațiile pentru care stelutele se înlocuiesc prin grupele de patru elemente obținute prin permutări cu repetiție ale elementelor din grupele $(1, 1, 2, 3)$, $(2, 2, 1, 3)$, $(3, 3, 1, 2)$].

Deoarece F are 4 elemente și E are 3 elemente, nu există aplicații g din F în E care să fie injective și deci nu există aplicații g din F în E care să fie bijective.

Observație. Dacă mulțimea E are m elemente, iar mulțimea F are n elemente, ținînd seama de formulele permutărilor cu repetiție și a permutărilor fără repetiție, se poate arăta că numărul de aplicații din E în F este n^m ; în cazul $m \leq n$ sînt injective un număr de $A_n^m = n(n-1) \dots (n-m+1)$ aplicații.

VII. 2. Să se rezolve ecuația

$$x! + 1 = (x+1)^2, \quad x - \text{număr natural.}$$

Rezolvare $x! = (x+1)^2 - 1 \Rightarrow x! = x(x+2) \Rightarrow (x-1)! = x+2, \quad (x \in N) \Rightarrow \Rightarrow (x-1)! - (x-1) = 3 \Rightarrow (x-1) \cdot [(x-2)! - 1] = 3.$

Rezolvînd în numere întregi există următoarele cazuri:

$$\begin{aligned} x-1 &= 3, \quad (x-2)! - 1 = 1 \Rightarrow x = 4; \\ x-1 &= 1, \quad (x-2)! - 1 = 3, \text{ imposibil în } N; \\ x-1 &= -3, \quad (x-2)! - 1 = -1, \text{ imposibil în } N; \\ x-1 &= -1, \quad (x-2)! - 1 = -3, \text{ imposibil în } N. \end{aligned}$$

Rezultă că $x = 4$ este o soluție a ecuației.

VII. 3. Să se rezolve sistemul

$$\frac{A_x^{y-3}}{A_x^{y-2}} = \frac{1}{8}, \quad \frac{C_x^{y-3}}{C_x^{y-2}} = \frac{5}{8}$$

Rezolvare. Din sistem rezultă $y \geq 3, x \geq y-3$, cu $x, y \in N$. Se scrie

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{x(x-1) \dots (x-y+4)}{x(x-1) \dots (x-y+3)} = \frac{1}{8}, \\ \frac{x!}{(y-3)! (x-y+3)!} \cdot \frac{(y-2)! (x-y+2)!}{x!} = \frac{5}{8} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-y+3} = \frac{1}{8}, \\ \frac{y-2}{x-y+3} = \frac{5}{8} \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow y-2 = 5, \quad x-y+3 = 8 \Rightarrow y = 7, \quad x = 12. \end{aligned}$$

Observație. Sistemul se rezolvă și altfel, aplicînd formulele:

$$A_n^{k-1} = \frac{1}{n-k+1} \cdot A_n^k, \quad C_n^{k-1} = \frac{k}{n-k+1} \cdot C_n^k,$$

în care se pune $n = x, k = y-2$.

VII. 4. Să se găsească termenii raționali (termenii care nu conțin radicali) ai dezvoltării binomului

$$(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x})^{16}.$$

Rezolvare.

$$T_{k+1} = C_{16}^k (\sqrt[3]{x^2})^{16-k} \cdot (\sqrt[4]{x})^k = C_{16}^k x^{\frac{32-2k}{3}} + \frac{k}{4}$$

Trebuie ca exponentul lui x să fie întreg, adică

$$10 - \frac{5k-8}{12} = n \text{ (întreg).}$$

Luând $k = 0, 1, 2, \dots, 16$ se obține $10 - \frac{5k-8}{12} = n$ (întreg) pentru $k = 4, n = 9$ și $k = 16, n = 4$, și deci termenii raționali sînt:

$$T_5 = C_{16}^4 x^9; T_{17} = x^4.$$

VII. 5. Să se afle termenul care nu conține pe x din dezvoltarea $\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^n$ știind că raportul dintre coeficientul termenului al patrulea și coeficientul termenului al șaselea este $\frac{5}{18}$.

Rezolvare. Pentru a afla $n \in N$ se rezolvă ecuația:

$$\frac{C_n^3}{C_n^5} = \frac{5}{18} \Rightarrow n = 12 \text{ (} n = -5 \text{ nu convine),}$$

$$T_{k+1} = C_{12}^k x^{-(12-k)} \cdot x^{\frac{k}{2}} = C_{12}^k x^{\frac{3k-24}{2}}.$$

Termenul liber este termenul pentru care exponentul lui x este zero: $\frac{3k-24}{2} = 0$ de unde $k = 8$ și deci $T_9 = C_{12}^8 = 495$.

VII. 6. Să se determine numărul natural n și termenul al șaselea al dezvoltării binomului $\left(\sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)^n$, știind că coeficientul termenului al patrulea al dezvoltării este egal cu 56.

Rezolvare.

$$C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56 \Rightarrow (n-2) \cdot (n-1) \cdot n = 6 \cdot 7 \cdot 8.$$

În cei doi membri avem produsul a trei numere naturale consecutive și deci $n = 8$.

$$T_6 = (-1)^5 C_8^5 (\sqrt{x+1})^3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)^5 = -\frac{56}{x+1},$$

VII. 7. În dezvoltarea lui $(x+y)^n$, ($x, y, n \in N$) după formula binomului lui Newton, termenul al doilea este egal cu 240, termenul al treilea este egal cu 720 și termenul al patrulea este egal cu 1 080. Să se găsească x, y, n .

Rezolvare. Conform enunțului rezultă

$$C_n^1 x^{n-1} y = 240; C_n^2 x^{n-2} y^2 = 720; C_n^3 x^{n-3} y^3 = 1080$$

sau

$$(a) nx^{n-1}y = 240; (b) \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}y^2 = 720; (c) \frac{n(n-1)(n-2)}{6} x^{n-3}y^3 = 1080.$$

Împărțind (b) la (a), (c) la (b) se obține sistemul

$$\begin{cases} \frac{(n-1)y}{2x} = 3, \\ \frac{(n-2)y}{3x} = \frac{3}{2}, \end{cases} \Rightarrow n = 5, \quad x = 2, \quad y = 3.$$

VII. 8. În dezvoltarea binomului $(\sqrt{2x} + \sqrt{2^{1-x}})^n$ suma coeficienților ultimilor trei termeni, este egală cu 22. Să se determine numărul natural n și $x \in R$ astfel încît, suma dintre termenul al treilea și termenul al cincilea să fie egală cu 135.

Rezolvare. Suma coeficienților ultimilor trei termeni este:

$$C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + 1 = 22 \Rightarrow n^2 + n - 42 = 0 \Rightarrow n = 6 \text{ (} n = -7 \notin N).$$

Suma termenilor al treilea și al cincilea dă ecuația:

$$C_6^3 (\sqrt{2x})^4 \cdot (\sqrt{2^{1-x}})^2 + C_6^4 (\sqrt{2x})^2 \cdot (\sqrt{2^{1-x}})^4 = 135 \Rightarrow 15 \cdot 2^x \cdot 2^{1-x} + 15 \cdot 2^x \cdot 2^{2-2x} = 135 \Rightarrow 2^{x+1} + 2^{2-x} = 9.$$

Înlocuind $2^x = y$ se obține ecuația

$$2y^2 - 9y + 4 = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = 4.$$

Deci

$$2^x = \frac{1}{2} = 2^{-1} \Rightarrow x_1 = -1, \quad 2^x = 4 = 2^2 \Rightarrow x_2 = 2.$$

VII. 9. Să se determine numărul natural n astfel încît al șaselea termen din dezvoltarea binomului $(7+3n)^n$ să fie cel mai mare.

Rezolvare. $T_5 < T_6 > T_7$ sau

$$\begin{aligned} C_n^4 \cdot 7^{n-4} \cdot (3n)^4 &< C_n^5 \cdot 7^{n-5} (3n)^5 > C_n^6 \cdot 7^{n-6} \cdot (3n)^6 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \cdot 7^{n-4} \cdot (3n)^4 &< \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!} \cdot 7^{n-5} \cdot (3n)^5 \\ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6!} \cdot 7^{n-6} \cdot (3n)^6 &< \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!} \cdot 7^{n-5} \cdot (3n)^5 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7 < \frac{n-4}{5} \cdot 3n, \\ \frac{n-5}{6} \cdot 3n < 7, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3n^2 - 12n - 35 > 0, \\ n^2 - 5n - 14 < 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$n \in \left\{ \left(-2, \frac{6 - \sqrt{141}}{3} \right) \cup \left(\frac{6 + \sqrt{141}}{3}, 7 \right) \right\} \cap N = \{6\} \Rightarrow n = 6.$$

VII. 10. Fie A_1, A_2, A_3, A_4 patru coeficienți consecutivi oarecare din dezvoltarea binomului $(a+b)^n$. Să se arate că între ei există relația

$$\frac{A_1}{A_1 + A_2} + \frac{A_3}{A_3 + A_4} = \frac{2A_2}{A_2 + A_3}$$

Rezolvare. $A_1 = C_n^{p+1}, A_2 = C_n^{p+2}, A_3 = C_n^{p+3}, A_4 = C_n^{p+4}$ cu p oarecare. Deoarece $C_n^{p+i} + C_n^{p+i+1} = C_{n+1}^{p+i+1}$, oricare ar fi $i = 1, 2, \dots$, rezultă:

$$\frac{A_1}{A_1 + A_2} + \frac{A_3}{A_3 + A_4} = \frac{C_n^{p+1}}{C_{n+1}^{p+2}} + \frac{C_n^{p+3}}{C_{n+1}^{p+4}} = \frac{\frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!}}{\frac{(n+1)!}{(p+2)!(n-p-1)!}} + \frac{\frac{n!}{(p+3)!(n-p-3)!}}{\frac{(n+1)!}{(p+4)!(n-p-3)!}}.$$

Deci

$$\frac{A_1}{A_1 + A_2} + \frac{A_3}{A_3 + A_4} = \frac{p+2}{n+1} + \frac{p+4}{n+1} = \frac{2(p+3)}{n+1}. \quad (1)$$

Analog

$$\frac{2A_2}{A_2 + A_3} = \frac{2C_n^{p+2}}{C_{n+1}^{p+3}} = 2 \cdot \frac{\frac{n!}{(p+2)!(n-p-2)!}}{\frac{(n+1)!}{(p+3)!(n-p-2)!}} = \frac{2(p+3)}{n+1}. \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă egalitatea care trebuia demonstrată.

VII. 11. Să se arate că

$$\left(\frac{C_k^1 + C_{2k}^2 + \dots + C_{nk}^n}{C_{k-1}^1 + C_{2k-1}^2 + \dots + C_{n-1}^n} \right)^n = \frac{C_k^1 \cdot C_{2k}^2 \cdot \dots \cdot C_{nk}^n}{C_{k-1}^1 \cdot C_{2k-1}^2 \cdot \dots \cdot C_{n-1}^n}.$$

Rezolvare. Deoarece

$$C_{nk}^n = \frac{(nk)!}{n!(nk-n)!} = \frac{(nk-1)!(nk)}{n!(nk-1-n)!(nk-n)} = \frac{k}{k-1} \cdot C_{n,k-1}^n,$$

pentru orice $n = 1, 2, \dots$, rezultă

$$C_k^1 = \frac{k}{k-1} \cdot C_{k-1}^1, C_{2k}^2 = \frac{k}{k-1} \cdot C_{2k-1}^2, \dots, C_{nk}^n = \frac{k}{k-1} \cdot C_{n,k-1}^n. \quad (1)$$

Adunând membru cu membru relațiile (1) se obține

$$C_k^1 + C_{2k}^2 + \dots + C_{nk}^n = \frac{k}{k-1} (C_{k-1}^1 + C_{2k-1}^2 + \dots + C_{n,k-1}^n),$$

sau

$$\frac{C_k^1 + C_{2k}^2 + \dots + C_{nk}^n}{C_{k-1}^1 + C_{2k-1}^2 + \dots + C_{n,k-1}^n} = \frac{k}{k-1}.$$

Deci

$$\left(\frac{C_k^1 + C_{2k}^2 + \dots + C_{nk}^n}{C_{k-1}^1 + C_{2k-1}^2 + \dots + C_{n,k-1}^n} \right)^n = \left(\frac{k}{k-1} \right)^n. \quad (2)$$

Înmulțind relațiile (1) membru cu membru se obține

$$C_k^1 \cdot C_{2k}^2 \cdot \dots \cdot C_{nk}^n = \left(\frac{k}{k-1} \right)^n \cdot C_{k-1}^1 \cdot C_{2k-1}^2 \cdot \dots \cdot C_{n,k-1}^n$$

sau

$$\frac{C_k^1 \cdot C_{2k}^2 \cdot \dots \cdot C_{nk}^n}{C_{k-1}^1 \cdot C_{2k-1}^2 \cdot \dots \cdot C_{n,k-1}^n} = \left(\frac{k}{k-1} \right)^n. \quad (3)$$

Din (2) și (3) obținem egalitatea din problemă.

VII. 12. Folosind egalitatea $(1+x)^{n+k} = (1+x)^n \cdot (1+x)^k$ să se arate că pentru $p \leq n$ și $p \leq k$ ($k, n, p \in N$) se obține

$$C_{n+k}^p = C_n^0 C_k^p + C_n^1 C_k^{p-1} + \dots + C_n^p C_k^0.$$

Să se arate apoi că

$$C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2.$$

Rezolvare. Dezvoltând după formula binomului, rezultă

$$1 + C_{n+k}^1 x + \dots + C_{n+k}^p x^p + \dots + C_{n+k}^{n+k} x^{n+k} \equiv (1 + C_n^1 x + \dots + C_n^n x^n) (1 + C_k^1 x + \dots + C_k^k x^k).$$

Făcând înmulțirile în membrul al doilea și identificând coeficienții lui x^p se obține

$$C_{n+k}^p = C_n^0 C_k^p + C_n^1 C_k^{p-1} + \dots + C_n^p C_k^0.$$

Pentru $k = p = n$:

$$C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2,$$

deoarece

$$C_{n-s}^{n-s} = C_n^s, s = 1, 2, \dots, n.$$

VII. 13. Să se arate că:

$$C_n^0 C_n^p + C_n^1 C_n^{p+1} + \dots + C_n^{n-p} C_n^n = \frac{(2n)!}{(n-p)!(n+p)!}.$$

Rezolvare. Se pleacă de la identitatea $(1+x)^n \cdot (1+x)^n = (1+x)^{2n}$, care se mai scrie și astfel, după binomul lui Newton

$$(C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^p x^p + C_n^{p+1} x^{p+1} + \dots + C_n^n x^n) \cdot (C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^p x^p + C_n^{p+1} x^{p+1} + \dots + C_n^n x^n) = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + \dots + C_{2n}^{n+p} x^{n+p} + \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n}.$$

Pentru ca identitatea să subziste trebuia ca după efectuarea înmulțirii în membrul întâi și scrierea lui ca un polinom crescător în x , coeficienții puterilor egale ale lui x din cei doi membri să fie egali. Dar coeficientul lui x^{n+p} din membrul întâi este

$$C_n^n C_n^p + C_n^{n-1} C_n^{p+1} + \dots + C_n^{p+1} C_n^{n-1} + C_n^p C_n^n = C_n^0 C_n^p + C_n^1 C_n^{p+1} + \dots + C_n^{n-p-1} C_n^{p+1} + C_n^{n-p} C_n^p \quad (1)$$

și coeficientul lui x^{n+p} din membrul al doilea este

$$C_{2n}^{n+p} = \frac{(2n)!}{(2n-n-p)! (n+p)!} = \frac{(2n)!}{(n-p)! (n+p)!} \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă egalitatea cerută.

VII. 14. Să se arate că

$$\sum_{k=2}^n (C_k^2)^2 = \frac{n(n^2-1)(3n^2-2)}{60},$$

Rezolvare. Din.

$$(C_k^2)^2 = \left[\frac{k!}{2! (k-2)!} \right]^2 = \frac{(k-1)^2 k^2}{4} = \frac{k^4 - 2k^3 + k^2}{4},$$

pentru orice $k = 2, 3, \dots, n$, rezultă că

$$\sum_{k=2}^n (C_k^2)^2 = \sum_{k=2}^n \frac{k^4 - 2k^3 + k^2}{4} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=2}^n k^4 - \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=2}^n k^3 + \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=2}^n k^2.$$

Înlocuind

$$\sum_{k=2}^n k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 - 1 = \frac{n(n+1)(2n-1)}{6} - 1; \quad \sum_{k=2}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 1;$$

$$\sum_{k=2}^n k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} - 1 \text{ se obține relația căutată.}$$

VII. 15. Să se arate că, pentru $p < n$, ($p, n \in \mathbb{N}$):

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} + \dots + C_p^{p-1} + C_{p-1}^{p-1}.$$

Rezolvare. Pentru orice $p < n$ ($1 < p < n$) rezultă:

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p.$$

deci

$$\begin{aligned} C_n^p &= C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p, \\ C_{n-1}^p &= C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^p, \\ &\dots \\ C_{p+1}^p &= C_p^{p-1} + C_p^p, \\ C_p^p &= C_{p-1}^{p-1}. \end{aligned}$$

Adunând membru cu membru aceste egalități se obține

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} + \dots + C_p^{p-1} + C_{p-1}^{p-1}.$$

VII. 16. Să se calculeze sumele

$$S_n^{(3)} = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2),$$

$$S_n^{(k)} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k + 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots k(k+1) + \dots + n(n+1) \dots (n+k-1).$$

Rezolvare.

$$\frac{S_n^{(3)}}{3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3!} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3!} + \dots + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} = C_3^3 + C_4^3 + \dots + C_{n+2}^3 = C_{n+3}^4$$

(am folosit rezultatul exercițiului precedent). Deci

$$S_n^{(3)} = 3! C_{n+3}^4 = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4}.$$

Analog

$$\bullet \frac{S_n^{(k)}}{k!} = C_k^k + C_{k+1}^k + \dots + C_{n+k-1}^k = C_{n+k}^{k+1}$$

de unde

$$S_n^{(k)} = \frac{(n+k)(n+k-1) \dots (n+1)n}{k+1}.$$

VII. 17. Să se găsească coeficientul lui x^5 din dezvoltarea polinomului

$$P(x) = (x^2 + x + 1)^4.$$

Rezolvare. Aplicând formula binomului lui Newton generalizată se obține

$$(x^2 + x + 1)^4 = \sum_{\substack{p+q+l=4 \\ p \neq q \neq l=0 \\ p+q+l=4}} \frac{4!}{p! q! l!} (x^2)^p (x)^q \cdot 1^l = \sum_{\substack{p+q+l=4 \\ p \neq q \neq l=0 \\ p+q+l=4}} \frac{4!}{p! q! l!} x^{2p+q}.$$

Coeficientul lui x^5 se obține rezolvând în numere întregi și pozitive sistemul

$$\begin{cases} p+q+l=4, \\ 2p+q=5. \end{cases} \quad (1)$$

Din ecuația a doua rezultă $q = 5 - 2p$. Introducând valoarea lui q în prima ecuație se obține $p - l = 1 \Rightarrow p = 1 + l$. Deci sistemul (1) este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} p = 1 + l, \\ q = 5 - 2p, \\ p + q + l = 4, \end{cases} \quad (2)$$

a cărui soluție trebuie să fie numere întregi pozitive. Alcătuim următorul tabel:

l	0	1	2
$p = 1 + l$	1	2	3
$q = 5 - 2p$	3	1	-1

Observăm că pentru $l \geq 2$ se obțin valori negative pentru q ; prin urmare soluțiile sistemului sînt $p_1 = 1, q_1 = 3, l_1 = 0; p_2 = 2, q_2 = 1, l_2 = 1$ și coeficientul lui x^5 este

$$\frac{4!}{1! 3! 0!} + \frac{4!}{2! 1! 1!} = 16.$$

VII. 18. Într-o urnă sînt bile numerotate numai cu două cifre distincte. Presupunînd că în urnă sînt bile cu toate numerele posibile cu 2 cifre, să se calculeze:

a) Probabilitatea ca extrăgînd o bilă să obținem un număr care să înceapă cu cifra 3.

b) Probabilitatea ca extrăgînd o bilă să obținem un număr care să înceapă cu o cifră pară.

c) Probabilitatea ca extrăgînd o bilă să obținem un număr care să conțină cifra 3.

Rezolvare. Probabilitatea producerii unui eveniment este raportul dintre numărul cazurilor favorabile și numărul tuturor cazurilor posibile — dacă toate cazurile au aceeași șansă de a se ivi (sînt egal probabile).

a) Numărul de bile numerotate cu două cifre este dat de numărul de sisteme ordonate de două elemente distincte care se pot forma cu elementele mulțimii $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ din care trebuie să scădem numărul sistemelor ordonate care încep cu cifra zero, adică

$$A_{10}^2 - A_9^1 = 81.$$

Deci în urnă se găsesc 81 de bile.

Numărul bilelor care încep cu cifra 3 este $A_9^1 = 9$. Deci

$$P(A) = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}.$$

b) Cifrele pare fiind 2, 4, 6, 8, numărul bilelor al căror număr începe cu o cifră pară este $4 \cdot A_9^1 = 36$, astfel că

$$P(B) = \frac{36}{81} = \frac{4}{9}.$$

c) Numărul bilelor care nu conțin cifra trei este

$$A_9^2 - A_8^1 = 81 - 8 = 73 \text{ și prin urmare } P(C) = 1 - \frac{73}{81} \approx 0,09.$$

Observație. Dacă p este probabilitatea evenimentului A , iar q este probabilitatea evenimentului contrar $\bar{A}$, atunci $p + q = 1$.

VII. 19. Dintr-o urnă care conține 20 bilete numerotate de la 1 la 20 se extrag 4. Care este probabilitatea ca printre ele să existe cel puțin unul din biletele cu numerele 3, 7, 9.

Rezolvare. Grupele de câte patru bilete care nu conțin numerele 3, 7, 9 sînt formate din celelalte 17 bilete; numărul lor este C_{17}^4 . Numărul grupelor de câte 4 bilete care se pot forma cu cele 20 de bilete este C_{20}^4 . Deci numărul grupelor de câte 4 bilete

care conțin cel puțin unul din numerele 3, 7, 9 este $C_{20}^4 - C_{17}^4$, iar probabilitatea ca la o extragere de 4 bilete să existe cel puțin unul din numerele 3, 7, 9 este

$$P(A) = \frac{C_{20}^4 - C_{17}^4}{C_{20}^4} = 1 - \frac{C_{17}^4}{C_{20}^4} = 0,51.$$

VII. 20. Într-o cutie de chibrituri sînt 38 bețe cu gămălie și trei bețe fără gămălie. Care este probabilitatea ca din 15 bețe scoase la întâmplare, două să fie fără gămălie.

Rezolvare. Aplicăm schema urnei cu bile neîntoarse (nerevenite). Cele 15 bețe pot fi extrase în C_{38+3}^{15} moduri (numărul cazurilor posibile), cele 2 bețe fără gămălie pot fi extrase în C_3^2 moduri, iar cele $15-2=13$ bețe cu gămălie pot fi extrase în C_{38}^{13} moduri deci numărul cazurilor favorabile este $C_3^2 \cdot C_{38}^{13}$. Probabilitatea căutată este

$$P = \frac{C_3^2 \cdot C_{38}^{13}}{C_{38+3}^{15}} \approx 0,25.$$

VII. 21. Într-un fișier sînt 10 000 fișe, numărul fiecărei fișe fiind scris cu ajutorul a patru cifre; de exemplu, fișa cu numărul 1 este 0001, cea cu numărul 36 este 0036, excepție făcînd fișa 10 000 pentru care în loc de 10 000 vom considera numărul 0000.

Se ia o fișă la întâmplare. Care este probabilitatea ca numărul fișei luate să conțină cifra 7?

Rezolvare. Fie A evenimentul care constă în scoaterea unei fișe care să conțină cifra 7 și $\bar{A}$ evenimentul care constă în scoaterea unei fișe care să nu conțină cifra 7. Evenimentele A și $\bar{A}$ fiind contrare se obține

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

Vom calcula probabilitatea evenimentului contrar $\bar{A}$. Numărul cazurilor egal posibile va fi egal cu numărul sistemelor de câte 4 numere care se pot forma cu elementele mulțimii $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, adică va fi egal cu numărul elementelor mulțimii $E \times E \times E \times E \times E = E^4$, deci cu $10^4 = 10\,000$. Numărul cazurilor egal posibile realizării evenimentului $\bar{A}$ va fi egal cu numărul sistemelor de câte 4 cifre care se pot forma cu elementele mulțimii $E_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$, adică va fi egal cu numărul elementelor mulțimii $E_1 \times E_1 \times E_1 \times E_1 = E_1^4$, deci cu $9^4 = 6\,561$. Atunci $P(\bar{A}) = \frac{6\,561}{10\,000} = 0,6561$ și deci $P(A) = 1 - 0,6561 = 0,3439$.

PROBLEME PROPUSE

VII. 1. Cîte drapele de cîte două culori se pot forma cu cele 7 culori care compun lumina împreună cu alb și negru dacă nu se ține seama de ordinea culorilor? Dar dacă se ține seama de ordinea culorilor?

VII. 2. Se consideră un dreptunghi împărțit în 12 pătrate. Fiecare pătrat poate fi colorat în roșu sau verde. Dacă 7 pătrate sînt de culoare verde și cinci de culoare roșie, în cîte moduri se poate realiza acest colorit?

Să se rezolve ecuațiile, știind că $x \in N$:

$$\text{VII. 3. } 8 \cdot A_{x+1}^5 = 3P_3 \cdot A_x^5;$$

$$\text{VII. 4. } 48 C_{x+6}^{x+2} = A_{x+7}^4.$$

Să se rezolve, în $N \times N$, sistemele:

$$\text{VII. 5. } \begin{cases} A_x^y = 10A_x^{y-1} \\ \frac{A_x^y \cdot P_{y+1}}{A_x^{y+1} \cdot P_y} = \frac{5}{3} \end{cases};$$

$$\text{VII. 6. } C_{x+1}^{y+1} = C_{x+1}^y = 2C_{x+1}^{y-1}.$$

VII. 7. Să se determine:

a) termenul din dezvoltarea binomului $(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[5]{x^3})^{12}$ care conține pe $x^{\frac{22}{3}}$;

b) termenul din dezvoltarea binomului $(\frac{\sqrt[3]{x}}{a} + \frac{a}{\sqrt[4]{x}})^{18}$ care conține pe x^{-1} .

VII. 8. Să se găsească rangul termenului din dezvoltarea binomului

$$\left(\sqrt[3]{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{\sqrt{x}}}\right)^{21}$$

în care x și y au puteri egale.

VII. 9. Să se găsească rangurile a trei termeni consecutivi ai dezvoltării binomului $(x + y)^{23}$, ai căror coeficienți formează o progresie aritmetică.

VII. 10. Suma coeficienților primilor trei termeni și dezvoltării binomului $(x^2 + \frac{1}{x})^n$ este egală cu 46. Să se găsească $n \in N$ și termenul care nu conține pe x .

VII. 11. Să se determine x din expresia $(\sqrt{x^{\frac{1}{1+\lg x}}} + \sqrt[12]{x})^6$ știind că al patrulea termen al dezvoltării sale binomiale este 200.

VII. 12. Să se găsească $m \in N$ și coeficientul lui $x^4 \sqrt[9]{x}$ din dezvoltarea binomului $(4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} + \frac{\sqrt[3]{2x^5}}{\sqrt[4]{x^3}})^m$, știind că coeficientul termenului al noulea este cel mai mare.

VII. 13. Să se determine $m \in N$ și termenul care conține pe x^4 din dezvoltarea binomului $(x\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x\sqrt[4]{x}})^m$ știind că suma coeficienților binomiali ai acestei dezvoltări este egală cu 128.

VII. 14. În dezvoltarea $(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^n$ suma coeficienților $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$ este mai mică cu 240 decît suma coeficienților binomiali din dezvoltarea $(a + b)^{2n}$. Să se determine $n \in N$ și termenul al treilea al primei dezvoltări.

VII. 15. Să se calculeze coeficientul lui x^6 din dezvoltarea $(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3)^4$.

VII. 16. Se cere coeficientul lui x^5 din dezvoltarea

$$(1 + x + x^2 - x^3)(1 - x)^9.$$

VII. 17. O urnă conține 9 bile albe și 6 bile negre; se scot cinci bile la întîmplare. Care este probabilitatea ca trei bile să fie albe și două negre?

VII. 18. Într-o clasă sînt 28 de elevi, dintre care 16 fete și 12 băieți. Care este probabilitatea ca o brigadă trimisă la muncă patriotică, formată din 8 elevi, să fie compusă din 5 fete și 3 băieți?

VII. 19. Dintr-o urnă care conține 9 bile albe, 7 bile roșii și 5 bile albastre se scot simultan 3 bile. Care este probabilitatea ca:

- cele trei bile scoase să fie de culori diferite;
- din cele trei bile scoase cel puțin două să fie de culoare albă;
- din cele trei bile scoase cel puțin una să fie albă.

VII. 20. Într-o stație, un număr de 30 pasageri se urcă într-un tren cu 6 vagoane, fiecare pasager alegîndu-și vagonul la întîmplare.

- Să se determine probabilitatea ca în ultimul vagon să urce trei persoane.
- Să se determine probabilitatea ca în fiecare vagon să urce același număr de persoane.
- Care este probabilitatea ca în primul vagon să urce 8 pasageri, în al doilea 6 pasageri, în al treilea 7 pasageri, în al patrulea 4 pasageri, în al cincilea 3 pasageri și în al șaselea 2 pasageri.

Capitolul VIII

PROGRESII. SUME

PROBLEME REZOLVATE

VIII. 1. Să se arate că expresiile:

$$(a+x)^2; a^2+x^2; (a-x)^2$$

sînt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. Să se calculeze suma primilor n termeni, primul termen fiind $(a+x)^2$.

Rezolvare. Termenii sînt în progresie aritmetică dacă $(a+x)^2 + (a-x)^2 = 2(a^2 + x^2)$, ceea ce este evident. Rația progresiei este $r = a^2 + x^2 - (a+x)^2 = -2ax$ și $a_n = (a+x)^2 - 2ax(n-1)$, de unde

$$S_n = \frac{[(a+x)^2 + (a+x)^2 - 2ax(n-1)]n}{2} = n[(a+x)^2 - ax(n-1)].$$

VIII. 2. Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n$ sînt termenii unei progresii aritmetice cu rația r , să se arate că

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}.$$

Rezolvare. Deoarece $\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{r}{a_k \cdot a_{k+1}}$ pentru $k = 1, 2, \dots, n$, rezultă

$$r \left(\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} \right) = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + \dots +$$

$$- \frac{1}{a_{n-2}} + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a_1}{a_1 a_n}.$$

Dar $a_n - a_1 = (n-1) \cdot r$ și deci $r \left(\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} \right) = \frac{(n-1)r}{a_1 a_n}$, de unde rezultă egalitatea dată.

VIII. 3. Într-o progresie aritmetică primul termen este a_1 , rația r , iar numărul termenilor este $2n$. Să se calculeze raportul $\frac{A}{B}$, unde A este suma primilor n termeni, iar B este suma ultimilor n termeni. Caz particular $a_1 = 1, r = 2, 2n = 100$.

$$\text{Rezolvare. } S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \text{ cu } a_n = a_1 + (n-1)r.$$

Deci

$$A = S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)r]n}{2}, \quad B = S_{2n} - S_n = \frac{[2a_1 + (2n-1)r]2n}{2} -$$

$$- \frac{[2a_1 + (n-1)r]n}{2} = \frac{[2a_1 + (3n-1)r]n}{2}$$

și

$$\frac{A}{B} = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2a_1 + (3n-1)r}.$$

Pentru $a_1 = 1, r = 2, 2n = 100$, adică $n = 50$, rezultă $\frac{A}{B} = \frac{1}{3}$.

VIII. 4. Fie progresia aritmetică $\div a_1, a_2, \dots, a_n$ cu rația r .

a) Să se calculeze:

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}};$$

$$E_2 = \frac{1}{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}} - \frac{1}{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_4} - \sqrt{a_3}} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}.$$

b) Pentru $r = 17$ și $a_1 = 9$, să se determine n astfel ca $E_2 = 1$.

Rezolvare. a) Termenul general al expresiilor se scrie

$$\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} \pm \sqrt{a_k}} = \frac{1}{\sqrt{a_k} + r \pm \sqrt{a_k}} \cdot \frac{\sqrt{a_k} + r \mp \sqrt{a_k}}{\sqrt{a_k} + r \mp \sqrt{a_k}} = \frac{\sqrt{a_{k+1}} \mp \sqrt{a_k}}{r}, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

și deci

$$E_1 = \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{r} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{r} + \dots + \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{r} = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}}{r} =$$

$$= \frac{a_n - a_1}{r(\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1})} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}};$$

$$E_2 = \frac{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_1}}{r} - \frac{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_2}}{r} + \frac{\sqrt{a_4} + \sqrt{a_3}}{r} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}}{r} \\ = \frac{\sqrt{a_1} + (-1)^n \sqrt{a_n}}{r}.$$

b) Pentru $r = 17$ și $a_1 = 9$ se obține

$$E_2 = \frac{3 + (-1)^n \sqrt{17n - 8}}{17} = 1 \Rightarrow 17n - 8 = 196 \Rightarrow n = 12.$$

VIII. 5. Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n$, sînt termenii unei progresii aritmetice cu rația r , să se arate că

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = \frac{1}{n} \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + \frac{n(n^2 - 1)r^2}{12}.$$

Rezolvare.

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{p=0}^{n-1} (a_1 + pr)^2 = \sum_{p=0}^{n-1} (a_1^2 + 2a_1pr + p^2r^2) = \\ = na_1^2 + 2a_1r \sum_{p=0}^{n-1} p + r^2 \sum_{p=0}^{n-1} p^2 = na_1^2 + 2a_1r \cdot \frac{n(n-1)}{2} + r^2 \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ \frac{1}{n} \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + \frac{n(n^2 - 1)r^2}{12} = \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{(a_1 + a_n)n}{2} \right]^2 + \frac{n(n^2 - 1)r^2}{12} = \\ = \frac{1}{n} \cdot \left[a_1 + \frac{(n-1)r}{2} \right]^2 \cdot n^2 + \frac{n(n^2 - 1)r^2}{12} = na_1^2 + 2a_1r \cdot \frac{(n-1)n}{2} + \\ + r^2 \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

VIII. 6. Se consideră o progresie aritmetică în care m și n sînt termeni de rang $p + q$ și respectiv $p - q$. Să se găsească termenii de rang p și q ai progresiei.

Rezolvare. Fie r rația progresiei aritmetice și a_1 primul termen al progresiei.

$$\begin{cases} m = a_1 + (p + q - 1)r \\ n = a_1 + (p - q - 1)r \end{cases} \Rightarrow a_1 = \frac{(m - n)(1 - p) + q(m + n)}{2q}, \quad r = \frac{m - n}{2q}$$

și atunci

$$a_p = a_1 + (p - 1)r = \frac{m + n}{2}, \quad a_q = a_1 + (q - 1)r = m - (m - n) \cdot \frac{p}{2q}.$$

VIII. 7. Primul termen al unei progresii aritmetice crescătoare este 3; primul termen al unei progresii geometrice crescătoare este tot 3. Termenii de rangul al doilea din cele două pregresii sînt de asemenea egali între ei. Termenul al treilea din progresia geometrică și termenul al treilea din progresia aritmetică sînt în raportul $\frac{9}{5}$. Să se afle cele două progresii.

Rezolvare. Notînd cu a_1, a_2, a_3 , termenii progresiei aritmetice cu rația r și cu b_1, b_2, b_3 termenii progresiei geometrice cu rația q , atunci relațiile:

$$a_1 = b_1 = 3; \quad a_2 = b_2; \quad 5b_3 = 9a_3,$$

împreună cu $a_2 = a_1 + r$, $a_3 = a_1 + 2r$, $b_2 = b_1q$, $b_3 = b_1q^2$ ne conduc la următorul sistem:

$$\begin{cases} 3 + r = 3q, \\ 15q^2 = 9(3 + 2r), \end{cases}$$

care rezolvat dă $q_1 = 3$, $q_2 = \frac{3}{5}$; $r_1 = 6$, $r_2 = -\frac{6}{5}$.

Progresiile fiind crescătoare este acceptabilă numai soluția $r = 6$ și $q = 3$. Deci aceste progresii sînt: 3, 9, 15 (aritmetică) și 3, 9, 27 (geometrică).

VIII. 8. Se dă progresia geometrică $\div a_1, a_2, \dots, a_n$ cu rația q .

a) Să se calculeze suma

$$G_n = \sum_{k=1}^n a_k q^k.$$

b) Să se determine termenul general al progresiei și suma primilor șase termeni pentru $a_1 = 1$ și $q = 2$.

Rezolvare. a) Deoarece $a_k = a_1 q^{k-1}$,

$$G_n = \sum_{k=1}^n a_k q^k = a_1 \sum_{k=1}^n q^{2k-1} = a_1(q + q^3 + \dots + q^{2n-1}) = \\ = a_1 \cdot \frac{q^{2n-1} \cdot q^2 - q}{q^2 - 1} = \frac{a_1 q(q^{2n} - 1)}{q^2 - 1}.$$

b) Înlocuind în expresia termenului general $a_n = a_1 q^{n-1}$ și în expresia sumei $S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$ pe $a_1 = 1$, $q = 2$ și $n = 6$ rezultă

$$a_n = 2^{n-1} \quad \text{și} \quad S_6 = \frac{2^6 - 1}{2 - 1} = 63.$$

VIII. 9. Să se arate că dacă numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$, cu $a_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) formează o progresie geometrică, există relația

$$a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n = a_1^2 \cdot a_2^2 \dots a_n^2 \cdot \left(\frac{1}{a_1^n} + \frac{1}{a_2^n} + \dots + \frac{1}{a_n^n} \right).$$

Rezolvare.

$$\begin{aligned} a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n &= a_1^n + (a_1 \cdot q)^n + \dots + (a_1 q^{n-1})^n = \\ &= a_1^n [1 + q^n + q^{2n} + \dots + q^{(n-1)n}] = a_1^n \frac{q^{n^2} - 1}{q^n - 1}. \end{aligned}$$

[În paranteză este suma unei progresii geometrice cu rația q^n]

Deci

$$a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n = a_1^n \frac{q^{n^2} - 1}{q^n - 1}. \quad (1)$$

Dar

$$\begin{aligned} a_1^2 \cdot a_2^2 \dots a_n^2 \cdot \left(\frac{1}{a_1^n} + \frac{1}{a_2^n} + \dots + \frac{1}{a_n^n} \right) &= a_1^2 \cdot (a_1 q^2) \dots (a_1 q^{n-1})^2 \cdot \\ &\cdot \left[\frac{1}{a_1^n} + \frac{1}{(a_1 q)^n} + \dots + \frac{1}{(a_1 q^{n-1})^n} \right] = a_1^{2n} \cdot q^{2+4+\dots+(2n-2)} \cdot \\ &\cdot \frac{1}{a_1^n} \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{q^n} + \dots + \frac{1}{q^{n(n-1)}} \right]. \end{aligned}$$

Observăm că $2 + 4 + \dots + (2n - 2)$ este o progresie aritmetică cu rația 2, care conține $n - 1$ termeni și are suma $S_{2n-2} = \frac{(2 + 2n - 2)(n - 1)}{2} = n(n - 1)$, iar în paranteză este o progresie geometrică cu rația $\frac{1}{q^n}$ avînd suma

$$S_{n-1} = \frac{\frac{1}{q^{(n-1)n}} \cdot \frac{1}{q^n} - 1}{\frac{1}{q^n} - 1} = \frac{1 - q^{n^2}}{q^{n^2}} \cdot \frac{q^n}{1 - q^n} = \frac{q^{n^2} - 1}{(q^n - 1) q^{n(n-1)}}.$$

Deci

$$a_1^2 \cdot a_2^2 \dots a_n^2 \cdot \left(\frac{1}{a_1^n} + \frac{1}{a_2^n} + \dots + \frac{1}{a_n^n} \right) = a_1^n \cdot \frac{q^{n^2} - 1}{q^n - 1}. \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă relația cerută.

VIII. 10. Dacă numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$ sînt în progresie armonică, să se arate că

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n = (n - 1) a_1 a_n.$$

Rezolvare. Termenii unei progresii armonice verifică relația

$$\frac{2}{a_k} = \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_{k+1}} \quad (k = 2, 3, \dots, n - 1).$$

Rezultă

$$\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k-1}} = \frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k} = d. \quad (k = 2, 3, \dots, n - 1). \quad (1)$$

Deci

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = d, \quad \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2} = d, \dots, \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n-2}} = d, \quad \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} = d.$$

Se obține un șir de $n - 1$ egalități care adunate, rezultă

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_1} = (n - 1) d \text{ sau } \frac{a_1 - a_n}{d} = (n - 1) a_1 a_n. \quad (2)$$

Se scriu relațiile (1) sub forma

$$\frac{1}{a_{i+1}} - \frac{1}{a_i} = \frac{a_i - a_{i+1}}{a_i a_{i+1}} = d \Rightarrow a_i \cdot a_{i+1} = \frac{a_i - a_{i+1}}{d} \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1).$$

Deci

$$a_1 \cdot a_2 = \frac{a_1 - a_2}{d}, \quad a_2 \cdot a_3 = \frac{a_2 - a_3}{d}, \dots, a_{n-1} a_n = \frac{a_{n-1} - a_n}{d}. \quad (3)$$

Adunînd, membru cu membru, egalitățile (3) se obține

$$a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + \dots + a_{n-1} \cdot a_n = \frac{a_1 - a_2}{d} + \frac{a_2 - a_3}{d} + \dots + \frac{a_{n-1} - a_n}{d} = \frac{a_1 - a_n}{d},$$

care împreună cu (2) va rezulta relația cerută.

VIII. 11. Fie $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ un șir de numere reale strict pozitive în progresie geometrică crescătoare și p un număr natural.

a) Să se arate că raportul sumelor:

$$S_n = \frac{1}{a_2^p + a_1^p} + \frac{1}{a_3^p + a_2^p} + \dots + \frac{1}{a_{n+1}^p + a_n^p},$$

$$S'_n = \frac{1}{a_2^p - a_1^p} + \frac{1}{a_3^p - a_2^p} + \dots + \frac{1}{a_{n+1}^p - a_n^p},$$

nu depinde de n .

b) Să se determine relația progresiei date, astfel ca

$$\frac{a_n}{a_{n-2} + a_{n+2}} = \frac{4}{17}.$$

Rezolvare. Fie $q > 1$ rația progresiei geometrice.
 $a_{k+1} = a_1 q^k$, $a_k = a_1 q^{k-1}$ și atunci

$$\frac{1}{a_{k+1}^p + a_k^p} = \frac{1}{(a_1 q^k)^p \cdot \left[1 + \frac{1}{q^p} \right]} = \frac{q^p}{a_1^p q^{kp} (1 + q^p)}.$$

Deci

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{k+1}^p + a_k^p} = \frac{q^p}{a_1^p (1 + q^p)} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{q^{kp}}. \quad (1)$$

Dar

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{q^{kp}} = \frac{1}{q^p} + \frac{1}{q^{2p}} + \dots + \frac{1}{q^{np}} = \frac{\frac{1}{q^{np}} - \frac{1}{q^p}}{\frac{1}{q^p} - 1} = \frac{q^{np} - 1}{q^{np}(q^p - 1)}$$

și prin urmare

$$S_n = \frac{q^p}{a_1^p (1 + q^p)} \cdot \frac{1 - q^{np}}{q^{np}(1 - q^p)} = \frac{q^{np} - 1}{a_1^p q^{(n-1)p} \cdot (q^{2p} - 1)}.$$

Analog se obține

$$\begin{aligned} S'_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{k+1}^p - a_k^p} = \sum_{k=1}^n \frac{q^p}{a_1^p q^{kp} (q^p - 1)} = \frac{q^p}{a_1^p (q^p - 1)} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{q^{kp}} = \\ &= \frac{q^{np} - 1}{a_1^p (q^p - 1)^2 \cdot q^{(n-1)p}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Din (1) și (2) se scrie $\frac{S_n}{S'_n} = \frac{q^p - 1}{q^p + 1}$, care nu depinde de n .

b) Înlocuind $a_n = a_{n-2} q^2$, $a_{n+2} = a_{n+2} q^4$ se obține ecuația în q :

$$\frac{q^2}{1 + q^4} = \frac{4}{17},$$

care rezolvată dă $q^2 = 4$ și $q^2 = \frac{1}{4}$, de unde $q = \pm 2$ și $q = \pm \frac{1}{2}$.

Este acceptabilă numai soluția $q = 2$, căci prin ipoteză $q > 1$.

VIII. 12. Se dau progresiile:

$$\div a_1, a_2, \dots, a_n; \div b_1, b_2, \dots, b_n, b_k \neq 0 (k = 1, 2, \dots, n).$$

Să se calculeze suma

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{b_k}.$$

Rezolvare. Fie r rația progresiei aritmetice și q rația progresiei geometrice.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{b_k} = \frac{a_1}{b_1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1} + r}{b_{k+1}} = \frac{a_1}{b_1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{b_{k+1}} + r \cdot \sum_{k=2}^n \frac{1}{b_k} = \\ &= \frac{a_1}{b_1} + \frac{1}{q} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{b_k} - \frac{a_n}{q b_n} + \frac{r}{b_1 q} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{q^{n-2}} \right) = \frac{a_1}{b_1} + \\ &+ \frac{1}{q} \cdot S_n - \frac{a_n}{q b_n} + \frac{r}{b_1 q} \cdot \frac{q^{n-2} - 1}{q^{n-2}(q - 1)}. \end{aligned}$$

De aici se obține

$$S_n - \frac{1}{q} \cdot S_n = \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_n}{q b_n} + \frac{r(q^{n-2} - 1)}{b_n(q - 1)}$$

și prin urmare

$$S_n = \frac{a_1 q}{b_1(q - 1)} - \frac{a_n}{b_n(q - 1)} + \frac{r(q^n - q)}{b_n(q - 1)^2}. \quad (1)$$

Observații. 1) Dacă în (1) se înlocuiește

$$a_1 = 1, r = 1, b_1 = 2, q = 2 \text{ se obține } \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 1 - \frac{n}{2^n} + \frac{2^n - 2}{2^n} = 2 - \frac{n + 2}{2^n},$$

adică problema propusă VIII. 30.

2) Dacă se pune în (1) $a_1 = 1, r = 2, b_1 = 2, q = 2$, atunci

$$\sum_{k=1}^n \frac{2k - 1}{2^k} = 1 - \frac{2n - 1}{2^n} + \frac{2(2^n - 2)}{2^n} = 3 - \frac{2n + 3}{2^n}.$$

3) Dacă în (1) se înlocuiește $a_1 = 1, r = 1, b_1 = 2, q = 2^2$ se obține

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^{2k-1}} = \frac{4}{6} - \frac{n}{3 \cdot 2^{2n-1}} + \frac{2^{2n} - 4}{9 \cdot 2^{2n-1}} = \frac{8}{9} - \frac{3n + 4}{9 \cdot 2^{2n-1}},$$

adică tocmai problema propusă VII. 11, (1).

VIII. 13. Fie $S_1, S_2, \dots, S_p$ sumele progresiilor geometrice infinite, avînd ca prim termen respectiv $1, 2, \dots, p$, iar ca rații respective pe $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{p+1}$. Să se arate că

$$S_1 + S_2 + \dots + S_p = \frac{p(p+3)}{3}.$$

Rezolvare. Folosind formula sumei progresiei geometrice descrescătoare infinite

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-q}, \text{ rezultă}$$

$$S_1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2, S_2 = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = 3, S_3 = \frac{3}{1-\frac{1}{4}} = 4, \dots, S_p = \frac{p}{1-\frac{1}{p+1}} = p+1.$$

Atunci $S_1 + S_2 + \dots + S_p = 2 + 3 + \dots + (p+1) = \frac{p(p+3)}{2}$ (suma unei progresii aritmetice cu rația 1 și cu p termeni).

VIII. 14. Să se calculeze

$$E = (4\sqrt{3} + 8) \cdot \left[\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2) + \frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{\sqrt{3}-2}{(\sqrt{3})^{n-2}} + \dots \right],$$

demonstrând în prealabil că expresia din paranteza mare este suma unei progresii geometrice descrescătoare infinite.

Rezolvare. Trebuie să arătăm că fiecare termen se obține din precedentul înmulțit cu rația, adică $a_2 = a_1 q, \dots, a_n = a_{n-1} q$. Din $a_n = a_{n-1} q$, rezultă

$$\frac{\sqrt{3}-2}{(\sqrt{3})^{n-2}} = \frac{\sqrt{3}-2}{(\sqrt{3})^{n-3}} \cdot q,$$

$$\text{de unde } q = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Se verifică ușor că $\frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}} = \frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$ etc.

și deci expresia din paranteza mare este suma unei progresii geometrice descrescătoare infinite cu rația $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Această sumă este egală cu

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{3(1-\sqrt{3})}{2}.$$

Expresia dată devine

$$E = (4\sqrt{3} + 8) \cdot \frac{3(1-\sqrt{3})}{2} = -6(1+\sqrt{3}).$$

VIII. 15. Să se simplifice expresia

$$E = \frac{\frac{3}{a^2} \cdot \frac{1}{1-\sqrt{a}} + a + \frac{a}{1+\sqrt{a}} + \frac{a}{(1+\sqrt{a})^2} + \dots + \frac{a}{(1+\sqrt{a})^{n-1}} + \dots}{\frac{a+3}{a^2+2a-3} + \frac{2-2a}{a^2+2a+1} - 1},$$

$$a > 0, a \neq -3; 1.$$

Rezolvare. Se observă că

$$a + \frac{a}{1+\sqrt{a}} + \frac{a}{(1+\sqrt{a})^2} + \dots + \frac{a}{(1+\sqrt{a})^n} + \dots$$

este suma unei progresii geometrice descrescătoare infinite cu rația $\frac{1}{1+\sqrt{a}}$. Deci

$$E = \frac{\frac{a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + a + \sqrt{a}}{\frac{a+3}{(a-1)(a+3)} + \frac{2(1-a)}{(a+1)^2} - 1} = \frac{(a+1)^2(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(a^2+2a-7)}.$$

VIII. 16. Să se calculeze suma

$$S = \left(a + \frac{1}{3}\right) + \left(3a - \frac{1}{6}\right) + \left(5a + \frac{1}{12}\right) + \dots + \left[(2n-1)a + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$$

compusă din $2n$ termeni.

Rezolvare. Se observă că S se desface într-o sumă de două progresii: una aritmetică cu rația $2a$: $S_1 = a + 3a + 5a + \dots + (2a-1)a = 2an^2$, și una geometrică cu rația

$$-\frac{1}{2}: S_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{9} \cdot \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] \text{ și deci}$$

$$S = S_1 + S_2 = 2an^2 + \frac{2}{9} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right].$$

VIII. 17. Se consideră șirul cu termenul general $u_n = ab^n$, unde a și b sînt două numere reale strict pozitive cu $a \neq 1, b \neq 1$. Să se calculeze suma

$$S = \sum_{j=0}^n \frac{1}{\log_{u_j} x}, \quad x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}.$$

Rezolvare. Se scriu logaritmi în baza a :

$$\log_{a^j} x = \log_{ab^j} x = \frac{\log_a x}{\log_a ab^j} = \frac{\log_a x}{1 + j \log_a b}, j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Deci

$$S = \sum_{j=1}^n \frac{1 + j \log_a b}{\log_a x} = \frac{1}{\log_a x} \cdot [1 + (1 + \log_a b) + (1 + 2 \log_a b) + \dots + (1 + n \log_a b)] = \frac{(2 + n \log_a b)(n + 1)}{2 \log_a x}.$$

(expresia din paranteza mare reprezintă suma a $n + 1$ termeni ai unei progresii aritmetice cu rația $\log_a b$).

VIII. 18. Fie suma $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, unde $a_k = \frac{6}{k(k+1)(k+3)}$.

a) Să se arate că $a_k = \frac{2}{k} - \frac{3}{k+1} + \frac{1}{k+3}$;

b) Să se calculeze S_n folosind rezultatul precedent;

c) Să se arate că $S_n < \frac{7}{6}$ pentru orice $n \in N$.

Rezolvare. a) Fie

$$\frac{6}{x(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3}.$$

Aducînd la același numitor și identificînd se obține sistemul

$$\begin{cases} A + B + C = 0, \\ 4A + 3B + C = 0, \\ 3A = 6, \end{cases}$$

cu soluția $A = 2$, $B = -3$, $C = 1$. Pentru $x = k$, $k \in N$ rezultă

$$a_k = \frac{2}{k} - \frac{3}{k+1} + \frac{1}{k+3}.$$

b) Folosind descompunerea aditivă de mai sus rezultă

$$S_n = \frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{2} - \frac{3}{3} + \frac{1}{5} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{6} + \frac{2}{4} - \frac{3}{5} + \frac{1}{7} + \frac{2}{5} - \frac{3}{6} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{2}{n-3} - \frac{3}{n-2} + \frac{1}{n} + \frac{2}{n-2} - \frac{3}{n-1} + \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n-1} - \frac{3}{n} + \frac{1}{n+2} + \frac{2}{n} - \frac{3}{n+1} + \frac{1}{n+3} = \frac{7}{6} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}.$$

c) Pentru orice $n \in N$ se obține

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} = \frac{2}{n+1},$$

adică

$$-\frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} < 0.$$

ceea ce ne spune că $S_n < \frac{7}{6}$ pentru orice $n \in N$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{7}{6}$.

VIII. 19. Se dă șirul

$$x^0, 2x^1, 3x^2, 4x^3, \dots, nx^{n-1}, \dots, n \in N,$$

unde $1 \neq x \in R$. Să se calculeze suma primilor n termeni.

Rezolvare. Se calculează

$$S = x^0 + 2x^1 + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}.$$

Pentru aceasta se descompune suma S în n sume componente scrise sub formă de tabel triunghiular:

$$x^0 + x^1 + x^2 + \dots + x^{n-2} + x^{n-1} = S_0,$$

$$x^1 + x^2 + \dots + x^{n-2} + x^{n-1} = S_1,$$

.....

$$x^{n-2} + x^{n-1} = S_{n-2},$$

$$x^{n-1} = S_{n-1}.$$

Din tabel se observă că $S = S_0 + S_1 + \dots + S_{n-1}$, iar S_k sînt sume de progresii geometrice cu rația x . Rezultă

$$S_0 = \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{1}{1 - x} - \frac{x^n}{1 - x}; S_1 = \frac{x}{1 - x} - \frac{x^n}{1 - x}; S_2 = \frac{x^2}{1 - x} - \frac{x^n}{1 - x}; \dots$$

$$S_3 = \frac{x^3}{1 - x} - \frac{x^n}{1 - x}; \dots; S_{n-2} = \frac{x^{n-2}}{1 - x} - \frac{x^n}{1 - x}; S_{n-1} = x^{n-1}.$$

Înlocuind în expresia lui S se obține

$$S = -\frac{(n-1)x^n}{1-x} + x^{n-1} + \frac{1}{1-x}(1+x+\dots+x^{n-2}) = \frac{-nx^n + x^{n-1}}{1-x} + \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1-x^{n-1}}{1-x} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2},$$

adică

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Observație. Suma $S = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$ se calculează ușor observând că: $kx^{k-1} = \frac{d}{dx} x^k$ și deci

$$S = \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=1}^n x^k \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^{n+1} - x}{x-1} \right) = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

VIII. 20. Se consideră șirul

7, 77, 777, 7777, ...

Să se calculeze suma primilor n termeni.

Rezolvare. $S = 7 + 77 + 777 + \dots + \underbrace{77 \dots 7}_{n \text{ cifre}} = 7(1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ cifre}}) = 7 \cdot S'$

Dar

$$1 = 1,$$

$$11 = 1 + 10,$$

$$111 = 1 + 10 + 10^2,$$

$$\underbrace{111 \dots 111}_{n \text{ cifre}} = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{n-1},$$

de unde se deduce

$$S' = n \cdot 1 + (n-1) \cdot 10 + (n-2) \cdot 10^2 + \dots + 2 \cdot 10^{n-2} + 10^{n-1} = \sum_{k=1}^n [(n+1) - k] 10^{k-1} = \sum_{k=1}^n [(n+1) \cdot 10^{k-1} - k \cdot 10^{k-1}] = (n+1) \sum_{k=1}^n 10^{k-1} - \sum_{k=1}^n k \cdot 10^{k-1}.$$

Dar $\sum_{k=1}^n 10^{k-1} = \frac{10^n - 1}{9}$ (deoarece este suma unei progresii geometrice cu primul termen egal cu 1 și rația 10) și

$$\sum_{k=1}^n k \cdot 10^{k-1} = \frac{1 - (n+1) \cdot 10^n + n \cdot 10^{n+1}}{(1-10)^2} = \frac{1 - (n+1) \cdot 10^n + n \cdot 10^{n+1}}{81}$$

conform formulei deduse la problema VIII. 19. Deci

$$S' = \frac{(n+1) \cdot 10^n - (n+1)}{9} - \frac{1 - (n+1) \cdot 10^n + n \cdot 10^{n+1}}{81} = \frac{10^{n+1} - 10 - 9 \cdot n}{81}.$$

De aici rezultă

$$S = \frac{7}{81} (10^{n+1} - 10 - 9n).$$

VIII. 21. Să se calculeze suma seriei

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

Rezolvare. Pentru a calcula suma S se folosește identitatea

$$\frac{(k+1)^2}{2^k} = \frac{k^2}{2^{k-1}} - \frac{k^2}{2^k} + \frac{k}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k}, \quad (1)$$

care este adevărată pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Făcând în (1) $k = 1, 2, \dots, n, \dots$, se obține

$$\frac{2^2}{2^1} = \frac{1^2}{2^0} - \frac{1^2}{2^1} + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1},$$

$$\frac{3^2}{2^2} = \frac{2^2}{2^1} - \frac{2^2}{2^2} + \frac{2}{2^1} + \frac{1}{2^2},$$

$$\frac{4^2}{2^3} = \frac{3^2}{2^2} - \frac{3^2}{2^3} + \frac{3}{2^2} + \frac{1}{2^3},$$

.....

$$\frac{n^2}{2^{n-1}} = \frac{(n-1)^2}{2^{n-2}} - \frac{(n-1)^2}{2^{n-1}} + \frac{n-1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}},$$

$$\frac{(n+1)^2}{2^n} = \frac{n^2}{2^{n-1}} - \frac{n^2}{2^n} + \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}.$$

.....

Adunând relațiile membru cu membru, se observă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2^n} = 0$ și reducând termenii asemenea se obține

$$0 = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n},$$

de unde

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot n}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}. \quad (2)$$

Pentru a calcula pe $S' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ se folosește relația $\frac{k+1}{2^k} = \frac{k}{2^{k-1}} - \frac{k}{2^k} + \frac{1}{2^k}$,

în care se face $k = 1, 2, \dots, n, \dots$; se obține

$$S' = 1 + S'' \quad \text{cu} \quad S'' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}. \quad (3)$$

Înlocuind (3) în (2) se obține

$$S = 1 + 2(1 + S'') + S''.$$

Iar $S'' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$, căci este suma unei progresii geometrice descrescătoare infinite cu rația $\frac{1}{2}$ și prin urmare $S = 6$, adică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6$.

Observație. Sumele parțiale ale seriei S' , adică $S'_k = \sum_{n=1}^k \frac{n}{2^n}$, se pot calcula imediat dacă se folosește proprietatea:

$$S'_k = \sum_{n=1}^k \frac{d}{dx} \left(\frac{x^n}{2^n} \right) \Big|_{x=1} = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^k \frac{x^n}{2^n} \right) \Big|_{x=1}.$$

Dar

$$\sum_{n=1}^k \frac{x^n}{2^n} = \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{x}{2} \right)^k = \frac{x \left[\left(\frac{x}{2} \right)^k - 1 \right]}{x - 2},$$

deci

$$S'_k = \frac{d}{dx} \left(\frac{x \left[\left(\frac{x}{2} \right)^k - 1 \right]}{x - 2} \right) \Big|_{x=1} = 2 - \frac{k+2}{2^k}$$

și $\lim_{k \rightarrow \infty} S'_k = 2$.

VIII. 22. Se dă seria

$$1 + r + rs + r^2s + r^2s^2 + \dots + r^n s^{n-1} + r^n s^n + \dots \quad (rs \neq 1),$$

a) Să se calculeze sumele parțiale S_{2p-1} și S_{2p} (se amintește că S_k este suma primilor k termeni ai seriei).

b) Să se calculeze suma seriei în cazul $|rs| < 1$.

Rezolvare. Termenul general al seriei date este:

$$u_n = \begin{cases} \frac{n}{r^2} \frac{n}{s^2} = r^p s^p, & \text{dacă } n = 2p, \\ \frac{n+1}{r^2} \frac{n-1}{s^2} = r^{p+1} s^p, & \text{dacă } n = 2p+1, \quad (n, p \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Suma parțială S_{2p-1} este

$$\begin{aligned} S_{2p-1} &= u_0 + u_1 + \dots + u_{2p-1} = [u_0 + u_2 + \dots + u_{2p-2}] + [u_1 + u_3 + \dots + u_{2p-1}] = \\ &= [1 + rs + r^2s^2 + \dots + r^{p-1}s^{p-1}] + [r + r^2s + r^3s^2 + \dots + r^p s^{p-1}] = \\ &= (1+r)[1 + rs + r^2s^2 + \dots + r^{p-1}s^{p-1}]. \end{aligned}$$

Expresia din paranteza mare este suma unei progresii geometrice cu rația rs și deci

$$S_{2p-1} = (1+r) \cdot \frac{1 - (rs)^p}{1 - rs}, \quad S_{2p} = S_{2p-1} + (rs)^p.$$

b) Pentru $|rs| < 1$:

$$S = (1+r)[1 + rs + r^2s^2 + \dots + r^n s^n + \dots] = (1+r) \cdot \frac{1}{1 - rs}.$$

PROBLEME PROPUSE

VIII. 1. Să se arate că dacă numerele $\frac{1}{a_2 + a_3}$, $\frac{1}{a_3 + a_1}$, $\frac{1}{a_1 + a_2}$ formează o progresie aritmetică, atunci numerele a_3^2 , a_2^2 , a_1^2 formează și ele o progresie aritmetică.

VIII. 2. Suma termenilor unei progresii aritmetice este 42, termenul al treilea este 8, iar termenul al patrulea este 6. Să se afle termenii extremi și numărul termenilor acestei progresii.

VIII. 3. Să se afle suma a $p + q$ termeni ai unei progresii aritmetice, în care termenul de rang p este egal cu q , iar termenul de rang q este egal cu p .

VIII. 4. Să se afle numărul laturilor unui poligon știind că perimetrul lui este 158 m, lungimile laturilor lui formează o progresie aritmetică cu rația 3 m, iar latura cea mai mare a poligonului este egală cu 44 m.

VIII. 5. O progresie aritmetică are 9 termeni. Suma a trei termeni din mijloc este 5, iar produsul extremilor este 1. Să se afle progresia. Să se insereze apoi 4 medii aritmetice între termenii al doilea și al treilea.

VIII. 6. a) Să se determine n numere $a_1, a_2, \dots, a_n$ cuprinse între două numere date a și b astfel ca diferențele $a_1 - a, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, b - a_n$ să formeze o progresie aritmetică cu rația r .

b) Între ce limite poate fi cuprins r ?

VIII. 7. Suma a trei numere pozitive care formează o progresie aritmetică este 15. Dacă la primul și la al doilea număr se adaugă câte 1, iar la al treilea 4, numerele obținute vor alcătui o progresie geometrică. Să se afle aceste numere.

VIII. 8. Să se afle patru numere întregi din care primele trei formează o progresie aritmetică și ultimele trei formează o progresie geometrică, știind că suma celor două numere extreme este 37, iar suma celor două numere medii este 36.

VIII. 9. Într-o progresie geometrică de șase termeni suma extremilor este 66, iar suma celor doi termeni din mijloc este 24. Să se afle progresia și să se insereze apoi cinci medii geometrice între al doilea și al treilea termen.

VIII. 10. Să se afle trei numere care formează o progresie geometrică descrescătoare, știind că suma lor este 26, iar suma pătratelor acestor numere este 364.

VIII. 11. Între termenii unei progresii geometrice există relațiile:

$$8(a_2 + a_7) = 915 \text{ și } 8(a_4 + a_5) = 135;$$

a) să se afle primul termen a_1 și rația q ;

b) să se afle câți termeni trebuie să aibă progresia cu rația supraunitară pozitivă pentru ca suma termenilor să fie $\frac{455}{8}$.

VIII. 12. Suma termenilor unei progresii geometrice descrescătoare infinite este egală cu 12,5 și suma primului termen cu cel de al doilea este egală cu 12. Să se afle această progresie.

VIII. 13. Se consideră perechile de numere reale $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ astfel că $x_1 < x_2 < x_3$ și satisfăcând relația $ax_i + by_i = c$ ($i = 1, 2, 3$) unde $a \neq 0$ și $b \neq 0$. Să se arate că:

a) dacă x_1, x_2, x_3 sînt în progresie aritmetică, atunci și y_1, y_2, y_3 sînt în progresie aritmetică și reciproc;

b) dacă $c \neq 0$ și numerele x_1, x_2, x_3 sînt în progresie geometrică, atunci y_1, y_2, y_3 nu pot fi nici în progresie aritmetică și nici în progresie geometrică.

VIII. 14. Se dă un pătrat cu latura a ; latura acestui pătrat se ia ca diagonală a unui al doilea pătrat; latura celui de al doilea pătrat se ia ca diagonală a unui nou pătrat, ș.a.m.d. pînă la infinit. Să se determine limita sumei ariilor acestor pătrate.

VIII. 15. Fie a, b, c trei numere în progresie aritmetică, b, c, d trei numere în progresie geometrică și c, d, e trei numere în progresie armonică. Să se arate că a, c, e sînt în progresie geometrică.

VIII. 16. Dacă a, b, c, d sînt patru numere în progresie aritmetică, a, e, f, d sînt patru numere în progresie geometrică și a, g, h, d sînt patru numere în progresie armonică, să se arate că

$$a \cdot d = e \cdot f = b \cdot h = c \cdot g.$$

VIII. 17. Dacă $a, b, c, d, \dots, l, m$ sînt $n + 1$ numere în progresie geometrică, să se arate că $\frac{1}{a^2 - b^2}, \frac{1}{b^2 - c^2}, \frac{1}{c^2 - d^2}, \dots, \frac{1}{m^2 - l^2}$ formează o progresie geometrică. Să se găsească suma acestei progresii.

VIII. 18. Să se calculeze suma

$$S_n = 2 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \dots + \left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

VIII. 19 Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$ termenii unei progresii aritmetice cu rația r . Să se calculeze suma

$$S = a_1 + a_2(a_1 + a_2) + a_3(a_1 + a_2 + a_3) + \dots + a_n(a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

Să se calculeze sumele:

$$\text{VIII. 20. } 1^3 + 4^3 + 7^3 + \dots + (3n - 2)^3.$$

$$\text{VIII. 21. } \sum_{p=1}^n \frac{1}{p(p+1)}.$$

$$\text{VIII. 22. } \sum_{p=1}^n \frac{1}{p(p+1)(p+2)}.$$

$$\text{VIII. 23. } \sum_{p=1}^n \frac{1}{p(p+1)(p+2)(p+3)}.$$

$$\text{VIII. 24. } \sum_{p=1}^n \frac{3p^2 + 2p + 5}{p(p+1)(p+2)(p+3)}.$$

$$\text{VIII. 25. } \sum_{k=1}^n (\sqrt{k + \alpha + 1} - 2\sqrt{k + \alpha} + \sqrt{k + \alpha - 1}), \quad \alpha > 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$\text{VIII. 26. } \sum_{k=1}^n \frac{1}{(\alpha + k)(\alpha + k + 1)}, \quad \alpha \text{ fiind un număr real diferit de orice întreg negativ.}$$

$$\text{VIII. 27. } \sum_{k=1}^n \frac{1}{16k^2 - 8k - 3} \cdot \quad \text{VIII. 28. } \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k + \sqrt{2})(k + \sqrt{2} + 1)}.$$

VIII. 29. Să se calculeze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{5^n}.$$

VIII. 30. Să se arate că

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

VIII. 31. Se dă seria

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

unde

$$u_0 = 1$$

$$u_{n+1} = \begin{cases} \alpha u_n & \text{pentru } n \text{ par,} \\ \beta u_n & \text{pentru } n \text{ impar,} \end{cases}$$

cu α și β două numere date astfel încât $\alpha\beta \neq 1$;

a) să se scrie expresia lui u_n în funcție de α , β și n ;

b) să se calculeze sumele parțiale S_{2p-1} și S_{2p} ;

c) să se calculeze suma serie în cazul $|\alpha\beta| < 1$.

VIII. 32. Se consideră seria cu termenul general

$$u_n = \log_a \left(1 - \frac{1}{n^2} \right), \quad a \neq 1, \quad a > 0.$$

Să se calculeze suma parțială $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ și apoi să se deducă suma

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{ a seriei date.}$$

Capitolul IX

MATRICE. DETERMINANȚI. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

PROBLEME REZOLVATE

IX. 1. Să se găsească matricea X care verifică relația

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 12 & -6 & -9 \end{bmatrix}$$

Rezolvare. Relația are loc dacă și numai dacă matricea X este de tipul $(2,3)$, întrucât produsul unei matrice de tipul (m,p) cu o matrice de tipul (p,n) este o matrice de tipul (m,n) .

Fie $X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$; atunci

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 12 & -6 & -9 \end{bmatrix}.$$

Ținând seama de regula de înmulțire a matricelor și de egalitatea matricelor se obțin sistemele de ecuații:

$$\begin{cases} a + 2d = -1 \\ -d = 3 \\ 3a + d = 12 \end{cases}; \quad \begin{cases} b + 2e = -2 \\ -e = 0 \\ 3b + e = -6 \end{cases}; \quad \begin{cases} c + 2f = 2 \\ -f = -3 \\ 3c + f = -9 \end{cases},$$

care conduc la $a = 5$, $b = -2$, $c = -4$, $d = -3$, $e = 0$, $f = 3$ și deci

$$X = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

IX. 2. Să se găsească matricele pătrate de ordinul al doilea de forma $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ cu $a, b, c, d \in R$, care verifică relația

$$X^2 - 2aX + (a^2 + b^2) \cdot I = O, \quad (1)$$

unde I și O sînt respectiv matricea unitate și matricea nulă.

Rezolvare. Relația (1) se scrie

$$\begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2a^2 & 2ab \\ 2ac & 2ad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Aplicînd definițiile de sumare și de egalitate a matricelor de aceeași dimensiuni, relația (2) conduce la sistemul

$$\begin{cases} a^2 + bc - 2a^2 + a^2 + b^2 = 0, \\ ab + bd - 2ab = 0, \\ ac + dc - 2ac = 0, \\ bc + d^2 - 2ad + a^2 + b^2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(c + b) = 0, \\ b(d - a) = 0, \\ c(d - a) = 0, \\ d - a = 0, \end{cases}$$

cu soluțiile: $b = 0$, $a = d$, c - oarecare; $a = d$, $c = -b$ și deci:

$$X_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

IX. 3. Se dă matricea

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

a) Să se calculeze $\sum_{k=1}^n A^k$.

b) Să se determine valorile lui α pentru care determinantul matricii $\sum_{k=1}^n A^k$ are valoarea 1.

Rezolvare. a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ -2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix};$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 3\alpha & \sin 3\alpha \\ -\sin 3\alpha & \cos 3\alpha \end{bmatrix}.$$

Relațiile de mai sus conduc la presupunerea că

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$$

pentru orice $n \in N$.

Într-adevăr, să arătăm că din presupunerea făcută rezultă

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= \begin{bmatrix} \cos (n+1)\alpha & \sin (n+1)\alpha \\ -\sin (n+1)\alpha & \cos (n+1)\alpha \end{bmatrix}; \\ A^{n+1} &= A^n \cdot A = \begin{bmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos n\alpha \cdot \cos \alpha - \sin n\alpha \cdot \sin \alpha & \cos n\alpha \cdot \sin \alpha + \sin n\alpha \cos \alpha \\ -\sin n\alpha \cdot \cos \alpha - \cos n\alpha \cdot \sin \alpha & -\sin n\alpha \cdot \sin \alpha + \cos n\alpha \cos \alpha \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos (n+1)\alpha & \sin (n+1)\alpha \\ -\sin (n+1)\alpha & \cos (n+1)\alpha \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Se calculează suma

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n A^k &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos 3\alpha & \sin 3\alpha \\ -\sin 3\alpha & \cos 3\alpha \end{bmatrix} + \dots + \\ &+ \begin{bmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \cos k\alpha & \sum_{k=1}^n \sin k\alpha \\ -\sum_{k=1}^n \sin k\alpha & \sum_{k=1}^n \cos k\alpha \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pentru a calcula sumele $S_1 = \sum_{k=1}^n \cos k\alpha$, $S_2 = \sum_{k=1}^n \sin k\alpha$, se înmulțește S_2 cu i și se adună la S_1 ; se obține numărul complex

$$S_1 + iS_2 = \sum_{k=1}^n \cos k\alpha + i \sum_{k=1}^n \sin k\alpha = \sum_{k=1}^n (\cos k\alpha + i \sin k\alpha) = \sum_{k=1}^n (\cos \alpha + i \sin \alpha)^k.$$

Se observă că numărul complex $S_1 + iS_2$ reprezintă suma unei progresii geometrice cu rația $(\cos \alpha + i \sin \alpha)$

$$\begin{aligned} S_1 + iS_2 &= \frac{(\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot [(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n - 1]}{(\cos \alpha + i \sin \alpha) - 1} = \\ &= \frac{(\cos \alpha + i \sin \alpha) (\cos n\alpha + i \sin n\alpha - 1)}{\cos \alpha + i \sin \alpha - 1}. \end{aligned}$$

Da

$$\cos \beta + i \sin \beta - 1 = 2 \sin \frac{\beta}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2} \right) \right]$$

astfel că

$$S_1 + iS_2 = \frac{\sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \left(\cos \frac{(n+1)\alpha}{2} + i \sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \right)$$

de unde

$$S_1 = \frac{\cos \frac{(n+1)\alpha}{2} \cdot \sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad \text{și} \quad S_2 = \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \cdot \sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Deci

$$\sum_{k=1}^n A^k = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ -S_2 & S_1 \end{bmatrix}.$$

b) Determinantul matricei $\sum_{k=1}^n A^k$ este

$$\det \left(\sum_{k=1}^n A^k \right) = \begin{vmatrix} S_1 & S_2 \\ -S_2 & S_1 \end{vmatrix} = S_1^2 + S_2^2 = \frac{\sin^2 \frac{n\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \left(\cos^2 \frac{(n+1)\alpha}{2} + \sin^2 \frac{(n+1)\alpha}{2} \right) = \frac{\sin^2 \frac{n\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Punind condiția că $\det \left(\sum_{k=1}^n A^k \right) = 1$ se obține ecuația trigonometrică în α :

$$\sin^2 \frac{n\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \sin \frac{n\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \frac{n\alpha}{2} = (-1)^k \cdot \frac{\alpha}{2} + k\pi$$

și

$$\sin \frac{n\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \frac{n\alpha}{2} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\alpha}{2} + k\pi, \text{ adică } \frac{n\alpha}{2} = \pm \frac{\alpha}{2} + k\pi,$$

de unde $\alpha = \frac{2k\pi}{n \pm 1}$, $k \in \mathbb{Z}$.

IX. 4. Să se arate că:

$$\begin{vmatrix} a+b & -a+b-c & b+c \\ a-b-c & a+b & a+c \\ a+c & b+c & -a-b+c \end{vmatrix} = -3(a+b+c)(a^2+b^2+c^2).$$

Rezolvare. Se adună toate liniile la prima:

$$3. \begin{vmatrix} a & b & c \\ a-b-c & a+b & a+c \\ a+c & b+c & -a-b+c \end{vmatrix}$$

Se scade prima linie din a doua și a treia:

$$3. \begin{vmatrix} a & b & c \\ -b-c & a & a \\ c & c & -a-b \end{vmatrix}$$

Se scade din coloana a doua coloana întâi, iar din a treia coloană se scade coloana a doua:

$$3. \begin{vmatrix} a & b-a & c-b \\ -b-c & a+b+c & 0 \\ c & 0 & -a-b-c \end{vmatrix} = -3(a+b+c)[a(a+b+c) + c(c-b) + (b-a)(b+c)] = -3(a+b+c) \cdot (a^2+b^2+c^2).$$

IX. 5. Să se afle valoarea determinantului:

$$D_4 = \begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix},$$

punându-se rezultatul sub formă de produs de factori.

Rezolvare. Se notează cu I, II, III, IV liniile determinantului D_4 . Dacă se scrie determinantul D_4 care are prima linie egală cu I + II + III + IV se observă că se putea scoate de pe prima linie factorul comun $a+b+c-x$. Analog, dacă în D_4 linia a doua este egală cu I + II - III - IV avem factorul comun $a-b-c-x$, dacă în D_4 linia a treia este egală cu -I + II + III - IV avem factorul comun $a+b-c+x$ și dacă în D_4 linia a patra este egală cu -I + II - III + IV avem factorul comun $a-b+c-x$. Deci D_4 poate fi pus sub forma: $D_4 = C(a+b+c-x) \cdot (a-b-c-x) \cdot (a+b-c+x) \cdot (a-b+c-x)$. Constanta C se determină din condiția ca coeficientul lui x^4 din determinantul dat să fie egal cu coeficientul lui x^4 din valoarea găsită pentru D_4 . Se obține $C = 1$ și deci $D_4 = -(a+b+c-x) \cdot (a-b-c-x) \cdot (a+b-c+x) \cdot (a-b+c-x)$.

IX. 6. Să se arate că determinantul

$$D_3 = \begin{vmatrix} bc(b^2 + bc + c^2) & ca(c^2 + ca + a^2) & ab(a^2 + ab + b^2) \\ (b+c)(b^2 + c^2) & (c+a)(c^2 + a^2) & (a+b)(a^2 + b^2) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

este divizibil prin $(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc)^2$; să se afle cîtul.

Rezolvare. Se scade prima coloană din a doua și a treia:

$$D_3 = \begin{vmatrix} bc(b^2 + bc + c^2) & ca(c^2 + ca + a^2) - bc(b^2 + bc + c^2) & ab(a^2 + ab + b^2) - bc(b^2 + bc + c^2) \\ (b+c)(b^2 + c^2) & (c+a)(c^2 + a^2) - (b+c)(b^2 + c^2) & (a+b)(a^2 + b^2) - (b+c)(b^2 + c^2) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Dar

$$ca(c^2 + ca + a^2) - bc(b^2 + bc + c^2) = c(a-b)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc),$$

$$ab(a^2 + ab + b^2) - bc(b^2 + bc + c^2) = b(a-c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc),$$

$$(c+a)(c^2 + a^2) - (b+c)(b^2 + c^2) = (a-b)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc),$$

$$(a+b)(a^2 + b^2) - (b+c)(b^2 + c^2) = (a-c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc).$$

Dezvoltînd D_3 după ultima linie și folosind relațiile de mai sus rezultă:

$$D_3 = 1 \begin{vmatrix} c(a-b)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc) & b(a-c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc) \\ (a-b)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc) & (a-c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc) \end{vmatrix} +$$

$$+ 0 = (a-b)(a-c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc)^2 \cdot \begin{vmatrix} c & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix},$$

adică D_3 este divizibil prin $(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc)^2$ și cîtul este $(a-b)(a-c) \cdot (c-b)$.

IX. 7. Să se demonstreze că determinantul antisimetric de ordinul 4:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$$

este pătrat perfect.

Rezolvare. Înmulțind coloana a doua cu bc , a treia cu ac , și a patra cu ab și pentru ca valoarea determinantului să nu se schimbe se va împărți determinantul cu $a^2b^2c^2$. Rezultă

$$\Delta_4 = \frac{1}{a^2b^2c^2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & abc & abc & abc \\ -a & 0 & acd & abc \\ -b & -bcd & 0 & abf \\ -c & -bce & -acf & 0 \end{vmatrix}.$$

Observînd că pe prima linie factorul comun este abc , pe linia a doua este a , pe linia a treia este b , iar pe linia a patra este c , atunci

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & cd & be \\ -1 & -cd & 0 & af \\ -1 & -be & -af & 0 \end{vmatrix}.$$

Se scade din linia a doua, linia a treia și din linia a treia, linia a patra. Se obține:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & cd & cd & be - af \\ 0 & -cd + be & af & af \\ -1 & -be & -af & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ cd & cd & be - af \\ -cd + be & af & af \end{vmatrix}$$

(s-a dezvoltat după prima coloană).

Se scade din coloana întâi, coloana a doua și din coloana a doua, coloana a treia:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & cd - be + af & be - af \\ -cd + be - af & 0 & af \end{vmatrix} = (cd - be + af)^2.$$

IX. 8. Se dă determinantul

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a_2 + a_3 & a_3 + a_4 & a_4 + a_5 \\ a_6 + a_7 & a_7 + a_8 & a_8 + a_9 & a_9 + a_{10} \\ a_{11} + a_{12} & a_{12} + a_{13} & a_{13} + a_{14} & a_{14} + a_{15} \\ a_{16} + a_{17} & a_{17} + a_{18} & a_{18} + a_{19} & a_{19} + a_{20} \end{vmatrix};$$

a) să se calculeze determinantul în cazul în care $a_1, a_2, \dots, a_{20}$ sînt în progresie aritmetică;

b) să se calculeze determinantul în cazul în care $a_1, a_2, \dots, a_{20}$ sînt în progresie geometrică.

Rezolvare. a) Notînd cu r rația progresiei aritmetice, determinantul se scrie

$$D'_4 = \begin{vmatrix} 2a_1 + r & 2a_1 + 3r & 2a_1 + 5r & 2a_1 + 7r \\ 2a_1 + 11r & 2a_1 + 13r & 2a_1 + 15r & 2a_1 + 17r \\ 2a_1 + 21r & 2a_1 + 23r & 2a_1 + 25r & 2a_1 + 27r \\ 2a_1 + 31r & 2a_1 + 33r & 2a_1 + 35r & 2a_1 + 37r \end{vmatrix}.$$

Se observă că prin adunarea coloanei a patra la prima și a treia la a doua se obține două coloane identice și prin urmare $D'_4 = 0$.

b) Se notează cu q rația progresiei geometrice. Rezultă

$$D_4' = \begin{vmatrix} a_1(1+q) & a_1q(1+q) & a_1q^2(1+q) & a_1q^3(1+q) \\ a_1q^5(1+q) & a_1q^6(1+q) & a_1q^7(1+q) & a_1q^8(1+q) \\ a_1q^{10}(1+q) & a_1q^{11}(1+q) & a_1q^{12}(1+q) & a_1q^{13}(1+q) \\ a_1q^{15}(1+q) & a_1q^{16}(1+q) & a_1q^{17}(1+q) & a_1q^{18}(1+q) \end{vmatrix}.$$

Se observă că pentru prima linie se dă factor comun pe $a_1(1+q)$, pentru a doua linie pe $a_1q^5(1+q)$, pentru a treia linie pe $a_1q^{10}(1+q)$, iar pentru linia a patra pe $a_1q^{15}(1+q)$. Deci

$$D_4'' = a_1^4 q^{30} (1+q)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & q & q^2 & q^3 \\ 1 & q & q^2 & q^3 \\ 1 & q & q^2 & q^3 \\ 1 & q & q^2 & q^3 \end{vmatrix} = 0 \text{ (liniile sînt identice).}$$

IX. 9. Să se calculeze valoarea determinantului

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix}.$$

Rezolvare. Scăzînd ultima coloană din toate celelalte și apoi adunînd la ultima linie pe toate celelalte se obține:

$$D_n = \begin{vmatrix} a-1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & a-1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1-a & 1-a & \dots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & a-1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a+(n-1) \end{vmatrix},$$

adică un determinant triunghiular a cărui valoare este egală cu produsul elementelor de pe diagonala principală. Deci $D_n = (a+n-1)(a-1)^{n-1}$.

IX. 10. Să se calculeze determinantul Vandermonde de ordinul 4:

$$V_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}.$$

Rezolvare. Din linia a doua se scade prima linie înmulțită cu x_1 , din linia a treia se scade linia a doua înmulțită cu x_1 , din linia a patra se scade linia a treia înmulțită cu x_1 ; se obține:

$$V_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_1x_2 & x_3^2 - x_1x_3 & x_4^2 - x_1x_4 \\ 0 & x_2^3 - x_1x_2^2 & x_3^3 - x_1x_3^2 & x_4^3 - x_1x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ x_2^2 - x_1x_2 & x_3^2 - x_1x_3 & x_4^2 - x_1x_4 \\ x_2^3 - x_1x_2^2 & x_3^3 - x_1x_3^2 & x_4^3 - x_1x_4^2 \end{vmatrix},$$

(s-a dezvoltat determinantul după coloana întâi). Se observă că din coloana întâi putem da factor pe $x_2 - x_1$, din coloana a doua pe $x_3 - x_1$ și din coloana a treia pe $x_4 - x_1$. Se obține

$$V_4 = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}.$$

Se aplică aceleași operații pentru determinantul Vandermonde de ordinul 3; se obține

$$V_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_3 - x_2 & x_4 - x_2 \\ 0 & x_3(x_3 - x_2) & x_4(x_4 - x_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_3 - x_2 & x_4 - x_2 \\ x_3(x_3 - x_2) & x_4(x_4 - x_2) \end{vmatrix} = (x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3).$$

Deci

$$V_4 = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) = \prod_{i>j} (x_i - x_j).$$

($i, j = 1, 2, 3, 4$)

IX. 11. Să se calculeze determinantul circular de ordinul trei, punîndu-se rezultatul sub formă de produs de trei factori

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Rezolvare. Adunînd liniile a doua și a treia la linia întâi se observă că D_3 este divizibil cu $a_1 + a_2 + a_3$. Fie ε rădăcina cubică complexă a unității, adică $\varepsilon = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Adunând la linia întâi, linia a doua înmulțită cu ε și linia a treia înmulțită cu ε^2 rezultă

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 + \varepsilon a_3 + \varepsilon^2 a_2 & a_2 + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_3 & a_3 + \varepsilon a_2 + \varepsilon^2 a_1 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \varepsilon a_3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{vmatrix},$$

unde $\varepsilon^3 = 1$ și $\varepsilon^4 = \varepsilon$. Prin urmare D_3 este divizibil și cu $a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \varepsilon a_3$. Dacă în D_3 se adună la linia întâi, linia a doua înmulțită cu ε^2 și linia a treia înmulțită cu ε , se obține:

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 + \varepsilon^2 a_3 + \varepsilon a_2 & a_2 + \varepsilon^2 a_1 + \varepsilon a_3 & a_3 + \varepsilon^2 a_2 + \varepsilon a_1 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_1 + \varepsilon a_2 + \varepsilon^2 a_3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Deci D_3 este divizibil și prin $a_1 + \varepsilon a_2 + \varepsilon^2 a_3$, adică D_3 este divizibil și cu produsul $(a_1 + \varepsilon a_2 + \varepsilon^2 a_3) \cdot (a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \varepsilon a_3) \cdot (a_1 + \varepsilon a_2 + \varepsilon^2 a_3)$. (Deoarece D_3 este un polinom omogen de gradul al treilea, rezultă că

$$D_3 = C(a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \varepsilon a_3)(a_1 + \varepsilon a_2 + \varepsilon^2 a_3),$$

unde C este o constantă. Dar în determinantul dat coeficientul lui a_1^3 este 1 și în expresia obținută coeficientul lui a_1^3 este C , adică $C = 1$ și prin urmare

$$D_3 = (a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \varepsilon a_3)(a_1 + \varepsilon a_2 + \varepsilon^2 a_3).$$

IX. 12. Fie determinantul fundamental $A_n = |a_{ij}|$ și determinantul format cu complementele algebrice ale elementelor sale, numit adjunctul sau reciprocul lui A_n , adică $A_n^* = |A_{ij}|$. Să se arate că $A_n^* = (A_n)^{n-1}$.

Rezolvare. Se face produsul celor doi determinanți:

$$A_n \cdot A_n^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix};$$

considerând compunerea liniilor celor doi factori, adică înmulțind linia întâi din primul determinant cu toate liniile din al doilea determinant, linia a doua din primul determinant cu toate liniile din al doilea determinant, ș.a.m.d. Se obține:

$$A_n \cdot A_n^* = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{1k} & \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{2k} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{nk} \\ \sum_{k=1}^n a_{2k} A_{1k} & \sum_{k=1}^n a_{2k} A_{2k} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{2k} A_{nk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk} A_{1k} & \sum_{k=1}^n a_{nk} A_{2k} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{nk} A_{nk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_n \end{vmatrix} = (A_n)^n,$$

unde $\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = 0$, pentru $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), deoarece această sumă constituie dezvoltarea unui determinant cu două linii identice. Deci $A_n \cdot A_n^* = (A_n)^n$, de unde $A_n^* = (A_n)^{n-1}$.

IX. 13. Fie $z_j = a_j + ib_j$ ($j = 1, 2, 3, 4$) patru numere complexe. Se consideră produsul determinanților

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_3 & z_4 \\ -\bar{z}_4 & \bar{z}_3 \end{vmatrix}.$$

Să se demonstreze teorema lui Euler: produsul a două sume de câte patru pătrate se poate exprima în 4 moduri ca sumă de 4 pătrate.

Rezolvare. Produsul celor doi determinanți este

$$(z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)(z_3 \bar{z}_3 + z_4 \bar{z}_4) = (a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2)(a_3^2 + b_3^2 + a_4^2 + b_4^2).$$

Se efectuează produsul celor doi determinanți în cele 4 moduri diferite (prin înmulțirea liniilor între ele, a coloanelor între ele, a liniilor cu coloanele și a coloanelor cu liniile). Se obține

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_3 & z_4 \\ -\bar{z}_4 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 z_3 + z_2 \bar{z}_4 & -z_1 \bar{z}_4 + z_2 \bar{z}_3 \\ -\bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_1 z_4 & \bar{z}_2 \bar{z}_4 + \bar{z}_1 \bar{z}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 z_3 + \bar{z}_2 \bar{z}_4 & z_1 z_4 - \bar{z}_2 \bar{z}_3 \\ z_2 z_3 - \bar{z}_1 \bar{z}_4 & z_2 z_4 - \bar{z}_1 \bar{z}_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} z_1 z_3 - z_2 \bar{z}_4 & z_1 z_4 + z_2 \bar{z}_3 \\ -\bar{z}_2 z_3 - \bar{z}_1 \bar{z}_4 & -\bar{z}_2 z_4 + \bar{z}_1 \bar{z}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 z_3 - \bar{z}_2 \bar{z}_4 & -z_1 \bar{z}_4 - \bar{z}_2 \bar{z}_3 \\ z_2 z_3 + \bar{z}_1 z_4 & -z_2 \bar{z}_4 + \bar{z}_1 \bar{z}_3 \end{vmatrix}.$$

Ca teorema lui Euler să fie complet demonstrată trebuie arătat că fiecare determinant produs este o sumă de 4 pătrate. Se consideră primul determinant produs al determinanților dați și se calculează:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} z_1 z_3 + z_2 z_4 & -z_1 z_4 + z_2 z_3 \\ -z_2 z_3 + z_1 z_4 & z_2 z_4 + z_1 z_3 \end{vmatrix} &= (z_1 z_3 + z_2 z_4)(z_2 z_4 + z_1 z_3) + (z_1 z_4 - z_2 z_3) \cdot (z_1 z_4 - z_2 z_3) = \\ &= z_1 z_1 z_3 z_3 + z_2 z_2 z_4 z_4 + z_1 z_3 z_2 z_4 + z_2 z_4 z_1 z_3 + z_1 z_1 z_4 z_4 - z_2 z_2 z_3 z_3 - z_1 z_4 z_2 z_3 - z_2 z_3 z_1 z_4 = \\ &= |z_1 z_3|^2 + |z_2 z_4|^2 + |z_1 z_4|^2 + |z_2 z_3|^2, \end{aligned}$$

S-a obținut o sumă de patru pătrate. În mod analog se arată că și ceilalți trei determinanți produși se exprimă fiecare printr-o sumă de 4 pătrate și cu aceasta teorema este demonstrată.

IX. 14. Să se calculeze matricea adjunctă (sau reciprocă) a matricei

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Rezolvare. Se consideră transpusa matricei A , obținută din A prin schimbarea liniilor în coloane:

$$A^t = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Adjuncta lui A are pe fiecare linie complementele algebrice ale elementelor situate pe liniile de același rang în determinantul matricei transpuse, adică în $\det(A^t) = |a_{ji}|$. Dacă se notează cu A^* adjuncta lui A , atunci

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix},$$

unde A_{ji} sînt complementii algebrici ai elementelor a_{ji} din $\det(A^t)$, adică $A_{ji} = (-1)^{j+i} M_{ji}$, cu M_{ji} minorii elementelor a_{ji} din $\det(A^t)$ ($j, i = 1, 2, 3$). Se determină elementele matricei A^* :

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= 4, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; \\ A_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12, \quad A_{32} = \\ &= (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{13} &= (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \\ &= (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

Deci adjuncta matricei A este

$$A^* = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

IX. 15. Să se afle inversa matricei

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rezolvare. Determinantul matricei este

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -48.$$

Deoarece $\det(A) \neq 0$, rezultă că matricea A are o inversă. Fie A^t matricea transpusă lui A și A^* matricea adjunctă (reciprocă) a lui A :

$$A^t = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ și } A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 1 & -5 \\ 8 & -8 & -8 \\ -1 & -11 & 7 \end{bmatrix}.$$

Prin urmare inversa matricei A este

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^* = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{\det(A)} & \frac{A_{21}}{\det(A)} & \frac{A_{31}}{\det(A)} \\ \frac{A_{12}}{\det(A)} & \frac{A_{22}}{\det(A)} & \frac{A_{32}}{\det(A)} \\ \frac{A_{13}}{\det(A)} & \frac{A_{23}}{\det(A)} & \frac{A_{33}}{\det(A)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{48} & -\frac{1}{48} & \frac{5}{48} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{48} & \frac{21}{48} & -\frac{7}{48} \end{bmatrix}.$$

IX. 16. Să se determine rangul matricei:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

prin aducere la forma canonică diagonală. (o matrice are forma canonică diagonală dacă primele r linii și r coloane formează matricea unitate, iar restul elementelor sînt nule).

Rezolvare. Pentru aducerea unei matrice la forma canonică diagonală se folosește proprietatea: rangul unei matrice nu se schimbă dacă la elementele unei linii (coloane) se adună elementele unei alte linii (coloane) înmulțite cu un număr. Această proprietate rezultă din proprietățile determinanților și din definiția rangului matricei. Folosind această proprietate, se adună prima linie, înmulțită cu factori convenabili, la celelalte linii astfel ca toate elementele din coloana întâi să fie nule, în afară de a_{11} ; se adună apoi prima coloană, înmulțită cu factori convenabili, la celelalte coloane, astfel ca toate elementele din linia întâi să fie nule, în afară de a_{11} . Se obține

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2-2 & -1+4 & 1-6 & 0+2 & -2+2 & -2+4 \\ -2+2 & -5-4 & 8+6 & -4-2 & 3-2 & -1-4 \\ 6-6 & 0+12 & -1-18 & 2+6 & -7+6 & -5+12 \\ -1+1 & -1-2 & 1+3 & -1-1 & 2-1 & 1-2 \end{bmatrix} \sim \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -9 & 14 & -6 & 1 & -5 \\ 0 & 12 & -19 & 8 & -1 & 7 \\ 0 & -3 & 4 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -9 & 14 & -6 & 1 & -5 \\ 0 & 12 & -19 & 8 & -1 & 7 \\ 0 & -3 & 4 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Se scade coloana a patra din a doua și se repetă procedeul aplicat pentru coloana întâi, linia întâi:

$$\begin{aligned} A &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 14 & -6 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & -19 & 8 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & 4 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Deci $\text{rang } A = 3$.

IX. 17. Să se afle matricea necunoscută X din ecuația matriceală:

$$X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 8 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Rezolvare. Ecuația matriceală dată este de forma $X \cdot A = B$, care se rezolvă înmulțind-o la dreapta cu A^{-1} ; deci $X = B \cdot A^{-1}$. Trebuie să determinăm inversa matricei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Deoarece $\det(A) = 2 \neq 0$, rezultă că A are o inversă, respectiv $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A$. Se

calculează adjuncta A^* a matricei A , adică $A^* = [A_{ji}]$, cu A_{ji} complementii algebrici ai elementelor a_{ji} din determinantul matricei transpuse. Rezultă

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

IX. '8. Să se rezolve, cu ajutorul calculului matriceal, sistemul

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 6. \end{cases} \quad (1)$$

Rezolvare. Se scrie sistemul (1) sub forma matriceală:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = B. \quad (2)$$

Rezolvarea sistemului (1) se reduce la rezolvarea ecuației matriceale (2). Rezultă

$$A^{-1} = -\frac{1}{60} \cdot \begin{bmatrix} -15 & 15 & 15 & 0 \\ -18 & 10 & -10 & -4 \\ 15 & -35 & 5 & 20 \\ -6 & 10 & -10 & -28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{15} \\ -\frac{1}{4} & \frac{7}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{7}{15} \end{bmatrix}$$

și ecuația (2) devine:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{15} \\ -\frac{1}{4} & \frac{7}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{7}{15} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

de unde, folosind definiția
 $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$

IX. 19. Aplicând

Rezolvare. I

$$\Delta =$$

IX. 9. Se dă matricea
 a) să se calculeze suma $A + B$ și
 b) să se determine relația care

$$\begin{vmatrix} c^2 \cdot a^3 & a^2 \cdot b^3 \\ ac + a^2 & a^2 + ab + b^3 \\ a & a + b \end{vmatrix}$$

a) să se calculeze A^2 ,
 b) să se afle matricea

IX. 10. Fără a

$$\begin{vmatrix} b^3 & a + b \\ a + b & 2 \end{vmatrix}$$

și prin urmare sistemul admite soluție

Determinanții corespunzători necunoscutelor
 coeficienților necunoscutelor cu termenii liberi:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 8; \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -12,$$

$$\Delta_t = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 16.$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

IX. '8. Să se rezolve, cu ajutorul calculului matriceal, sistemul

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 6. \end{cases} \quad (1)$$

Rezolvare. Se scrie sistemul (1) sub forma matriceală:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = B. \quad (2)$$

Rezolvarea sistemului (1) se reduce la rezolvarea ecuației matriceale (2). Rezultă

$$A^{-1} = -\frac{1}{60} \cdot \begin{bmatrix} -15 & 15 & 15 & 0 \\ -18 & 10 & -10 & -4 \\ 15 & -35 & 5 & 20 \\ -6 & 10 & -10 & -28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{15} \\ -\frac{1}{4} & \frac{7}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{7}{15} \end{bmatrix}$$

și ecuația (2) devine:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{15} \\ -\frac{1}{4} & \frac{7}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{7}{15} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

de unde, folosind definiția egalității matricelor, rezultă că soluția sistemului (1) este $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$.

IX. 19. Aplicând regula lui Cramer, să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x + y + z + t = 2, \\ 2y + 2z + t = 2, \\ -2x + 2y - t = 2, \\ 8x + y - z = 2. \end{cases}$$

Rezolvare. Determinantul sistemului este:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

și prin urmare sistemul admite soluție unică.

Determinanții corespunzători necunoscutelor sistemului se obțin din Δ prin înlocuirea coeficienților necunoscutelor cu termenii liberi:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -4;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 8; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -12,$$

$$\Delta_t = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 16.$$

Prin urmare

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 2, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = -3, \quad t = \frac{\Delta_t}{\Delta} = 4.$$

Observație. Notînd $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$, $t = x_4$, sistemul se scrie sub formă matriceală astfel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix};$$

rezolvarea sistemului reducîndu-se la rezolvarea ecuației matriceale $AX = B$.

IX. 20. Să se studieze compatibilitatea sistemului și dacă este compatibil, să se rezolve:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 8, \\ 2x - 3y + z = 1, \\ 5x + 9y + 4z = 22. \end{cases}$$

Rezolvare.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 9 & 4 \end{bmatrix} \text{ (matricea sistemului) și } \Delta = \det(A) = 0.$$

Dintre determinanții de ordinul cel mai mare diferiți de zero, extrași din matricea sistemului, se consideră determinantul $\delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$, pe care îl alegem ca determinant principal; atunci primele două ecuații sînt principale (celelalte ecuații ale sistemului le numim auxiliare sau secundare), iar x , y sînt necunoscute principale. Determinantul caracteristic al sistemului, care se obține prin completarea determinantului principal cu o coloană formată din termenii liberi corespunzători ecuațiilor principale și cu o linie formată din coeficienții unei ecuații secundare din sistemul dat și termenul liber al acesteia, este

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 9 & 22 \end{vmatrix} = 0.$$

Prin urmare sistemul este compatibil și nedeterminat (admite ∞^1 soluții), soluțiile fiind date de sistemul format cu ecuațiile principale:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 8 \\ 2x - 3y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{25 - 7z}{11}, \quad y = \frac{13 - z}{11}, \quad z = z \in R.$$

Observație. Rezultatele de mai sus le putem obține pe o cale simplă aplicînd teorema Kronecker-Capelli-Rouché în cazul particular $m = n$ (numărul ecuațiilor este egal cu numărul necunoscutelor), căci

$$\text{rang} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 9 & 4 \end{bmatrix} = 2; \quad \text{rang} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 5 & 9 & 4 & 22 \end{bmatrix} = 2.$$

Din $n = 3$ și deoarece rangul matricei coeficienților necunoscutelor este egal cu rangul matricei lărgite și anume egal cu 2, ($r < n$), rezultă că sistemul este compatibil și nedeterminat, admițînd ∞^1 soluții.

IX. 21. Să se cerceteze dacă sistemul

$$\begin{cases} x - y + 3z + t = -8, \\ 3x + y - z + 2t = -5, \\ 2x + 2y - 4z + t = 3, \end{cases}$$

are soluții. În caz afirmativ, să se rezolve.

Rezolvare. Matricea sistemului este

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pentru a calcula rangul acestei matrice se scade linia întâi din a doua și rezultă

$$\text{rang } A = \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} = 2,$$

deoarece toți determinanții de ordinul trei sînt nuli. Fie $\delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4$ determinantul principal al sistemului dat;

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -8 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

(prima linie este o combinație liniară a ultimelor două). Rezultă că sistemul este compatibil și admite ∞^2 soluții date de:

$$x = -\frac{2z + 3t + 13}{4}, \quad y = \frac{10z + t + 19}{4}, \quad z = z \in R, \quad t = t \in R.$$

IX. 22. Să se discute și să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x - \lambda y + z = 1 \\ x - y + z = -1, \\ x + \lambda^2 y - z = \lambda^2, \end{cases}$$

unde λ este un parametru real, oarecare.

Rezolvare. Determinantul sistemului este

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2.$$

a) Dacă $1 - \lambda^2 \neq 0$, adică $\lambda \neq \pm 1$, atunci $\Delta \neq 0$ și din formulele lui Cramer se obține

$$x = 1 + \lambda, \quad y = \frac{2}{1 - \lambda}, \quad z = \frac{\lambda(1 + \lambda)}{1 - \lambda}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

b) Pentru $\lambda = 1$, ($\Delta = 0$), sistemul devine

$$\begin{cases} x - y + z = 1, \\ x - y + z = -1, \\ x + y - z = 1, \end{cases}$$

care este incompatibil (primele două ecuații sînt incompatibile).

c) Pentru $\lambda = -1$ ($\Delta = 0$), se obține sistemul

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - y + z = -1, \\ -x + y - z = 1. \end{cases}$$

Din matricea sistemului se extrage determinantul format din coeficienții lui x și y din primele două ecuații $\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ pe care îl considerăm determinant principal. Determinantul caracteristic al sistemului este

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

și prin urmare sistemul este compatibil și simplu nedeterminat, cu soluția $x = -z$, $y = 1$, $z = z \in \mathbb{R}$.

IX. 23. Să se discute natura sistemului

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + z = n, \\ mx + y + z = 4, \end{cases}$$

după valorile parametrilor reali m și n .

Rezolvare. Matricea sistemului este

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad \Delta = \det(A) = m - 3.$$

a) Dacă $m \neq 3$, atunci $\Delta \neq 0$ și sistemul admite soluția unică dată de formulele lui Cramer.

b) Dacă $m = 3$, atunci $\Delta = 0$. Fie $\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, determinantul principal format din coeficienții lui x și y din primele două ecuații. Determinantul caracteristic este

$$|\Delta_c| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & n \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(n - 3).$$

— Dacă $n = 3$, atunci $\Delta_c = 0$ și prin urmare sistemul este compatibil și nedeterminat.

— Dacă $n \neq 3$, atunci $\Delta_c \neq 0$ și sistemul este incompatibil (imposibil).

IX. 24. Să se discute sistemul

$$\begin{cases} mx + (m + 1)y + (m + 2)z = m + 3, \\ nx + (n + 1)y + (n + 2)z = n + 3, \\ x + px + p^2x = p^3, \end{cases}$$

după valorile parametrilor reali m, n, p ; să se rezolve în cazul în care este compatibil.

Rezolvare. Determinantul sistemului este

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & m + 1 & m + 2 \\ n & n + 1 & n + 2 \\ 1 & p & p^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ n & 1 & 1 \\ 1 & p - 1 & p^2 - p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 1 & p - 1 & (p - 1)^2 \end{vmatrix} = (p - 1)^2 \cdot (m - n).$$

Dacă rangul matricei coeficienților este egal cu $n - 1$, atunci orice soluție a sistemului considerat poate fi pusă sub forma

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{\begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}} &= \frac{x_2}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}} = \dots = \\ &= \frac{x_k}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,k-1} & a_{n-1,k+1} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}} = \dots = \frac{x_n}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & \dots & a_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}} \end{aligned}$$

IX. 26. Să se determine $m \in R$ astfel ca sistemul omogen

$$\begin{cases} 2x + 5y + z - 2t = 0, \\ mx - 6y - 4z + 2t = 0, \\ 3x + y - 3z + 4t = 0, \\ 2x + my - 2z = 0, \end{cases}$$

să admită soluții nu toate nule și apoi să se rezolve.

Rezolvare. Pentru ca sistemul să admită și soluții diferite de soluția zero, trebuie ca determinantul sistemului să fie nul:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 & -2 \\ m & -6 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & -m & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 & -2 \\ m+2 & -1 & -3 & 0 \\ 7 & 11 & -1 & 0 \\ 2 & -m & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2m^2 - 6m + 20 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 = -5, m_2 = 2.$$

Pentru $m = -5$, sistemul se scrie

$$\begin{cases} 2x + 5y + z - 2t = 0, \\ -5x - 6y - 4z + 2t = 0, \\ 3x + y - 3z + 4t = 0, \\ 2x + 5y - 2z = 0, \end{cases}$$

din care se consideră

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -5 & -6 & -4 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -78 \neq 0.$$

ca determinant principal. Soluția sistemului format din ecuațiile principale, conform observației de la problema precedentă, se scrie

$$\frac{x}{-68} = \frac{y}{48} = \frac{z}{52} = \frac{t}{78} = \frac{k}{2} \in R \Rightarrow x = -34k, y = 24k,$$

$$z = 26k, t = 39k, \forall k \in R.$$

În mod analog se procedează pentru $m = 2$. Alegându-se ca determinant principal, determinantul

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 2 & -6 & -4 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 34 \neq 0,$$

se obține $x = 2k, y = -k, z = 3k, t = k, \forall k \in R$

IX. 27. Să se găsească un sistem fundamental de soluții pentru sistemul de ecuații omogene:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0, \\ x + y - z - 2t = 0, \\ 5x + 5y - z - 4t = 0, \\ x + y + 3z + 4t = 0. \end{cases}$$

Rezolvare. Soluțiile unui sistem de ecuații liniare formează un sistem fundamental dacă soluțiile sunt liniar independente și orice altă soluție a sistemului de ecuații dat se scrie ca o combinație liniară a acestora. Matricea sistemului este

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 5 & 5 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Deoarece în matricea sistemului sînt două coloane identice rezultă că $\det(A) = 0$. De asemenea, linia a treia este prima linie înmulțită cu 2 și adunată cu a doua linie înmulțită cu 3, iar ultima linie este la fel o combinație liniară a primelor două linii. Rezultă că toți determinanții de ordinul al treilea care se pot forma din matricea A sînt nuli. Deoarece

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \text{ rezultă că } \text{rang } A = 2 \text{ și prin urmare orice sistem fundamental}$$

de soluții va fi format din $4 - 2 = 2$ soluții, potrivit teoremei: „Dacă matricea $A = [a_{ij}]$,

corespunzătoare sistemului $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) are rangul r , atunci pentru siste-

mul considerat există un sistem fundamental de $n - r$ soluții“. Pentru a le obține se rezolvă sistemul corespunzător determinantului δ :

$$\begin{cases} x + z = -y - t \\ x - z = -y + 2t \end{cases} \Rightarrow x = -y + \frac{1}{2}t, z = -\frac{3}{2}t, \forall y, t \in R.$$

Soluțiile particulare ale sistemului se obțin dând valori reale lui y și t ; pentru $y_1 = 0$, $t_1 = 1$ rezultă $x_1 = \frac{1}{2}$, $z_1 = -\frac{3}{2}$, iar pentru $y_2 = 1$, $t_2 = 0$; $x_2 = -1$, $z_2 = 0$. Soluțiile $\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{3}{2}, 1\right)$ și $(-1, 1, 0, 0)$ formează un sistem fundamental de soluții, adică sînt liniar independente; cu alte cuvinte sistemul

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_1 = 0, \\ \alpha y_1 + \beta y_2 = 0, \\ \alpha z_1 + \beta z_2 = 0, \\ \alpha t_1 + \beta t_2 = 0 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} \frac{1}{2} \alpha - \beta = 0, \\ 0 \cdot \alpha + \beta = 0, \\ -\frac{3}{2} \alpha + 0 \cdot \beta = 0, \\ \alpha + 0 \cdot \beta = 0, \end{cases}$$

admite numai soluția $\alpha = \beta = 0$. Într-adevăr, rangul matricei sistemului fiind 2, sistemul admite numai soluția zero și deci soluțiile

$$\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{3}{2}, 1\right), \\ (-1, 1, 0, 0)$$

formează un sistem fundamental de soluții pentru sistemul dat.

Observație. Soluția generală a sistemului se exprimă cu ajutorul sistemului fundamental de soluții astfel:

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cdot C_1 + x_2 C_2 = \frac{1}{2} C_1 - C_2, \\ y &= y_1 \cdot C_1 + y_2 \cdot C_2 = C_2, \\ z &= z_1 C_1 + z_2 C_2 = -\frac{3}{2} C_1, \\ t &= t_1 C_1 + t_2 C_2 = C_1. \end{aligned}$$

Orice soluție particulară se obține din soluția generală dând valori constantelor C_1 și C_2 .

PROBLEME PROPUSE

IX. 1. Să se găsească matricele X care, față de operația de înmulțire, comută cu matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

IX. 2. Să se găsească matricele X astfel ca produsul $M \cdot X$ să fie o matrice pătrată diagonală, cînd $M = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

IX. 3. Se dau matricele:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \\ x & y \\ z & t \end{bmatrix} \text{ cu } x, y, z, t \in R;$$

a) să se determine matricea F astfel ca $A \cdot F = I$;
b) să se determine matricea F astfel ca $A \cdot F = O$.
(I — matricea unitate, O — matricea nulă).

IX. 4. Fie matricele

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Să se verifice egalitățile:

$$\begin{aligned} A \cdot (B \cdot C) &= (A \cdot B) \cdot C, \quad A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C, \\ (A + B) \cdot C &= A \cdot C + B \cdot C. \end{aligned}$$

IX. 5. Să se rezolve în inelul claselor de resturi mod 7 ecuația matriceală

$$X^2 = \begin{bmatrix} \hat{6} & \hat{1} \\ \hat{4} & \hat{6} \end{bmatrix}.$$

Să se rezolve în inelul $(Z, +, \cdot)$ sistemele matriceale, cu X și Y matrice pătrate de ordinul al doilea.

$$\text{IX. 6. } \begin{cases} X + Y = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}, \\ X \cdot Y = \begin{bmatrix} -7 & 8 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad \text{IX. 7. } \begin{cases} X + Y \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \\ X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + Y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

IX. 8. Se dau matricele

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \cos x & \sin x \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \cos x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

- a) să se calculeze suma $A + B$ și produsul $A \cdot B$;
b) să se determine relația care există între $\det(AB)$ și $\det(A)$.

IX. 9. Se dă matricea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix};$$

- a) să se calculeze A^2, A^3 și să se deducă apoi prin inducție completă A^n ;

- b) să se afle matricea $B = \sum_{k=1}^n A^k$ și să se calculeze $\det(B)$.

IX. 10. Fără a dezvolta determinanții, folosind numai proprietățile determinanților, să se arate că au loc egalitățile:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ a\alpha & b\beta & c\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bcp & caq & abr \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}, \quad (1)$$

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Să se calculeze valoarea determinanților:

$$\text{IX. 11. } \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 8 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{IX. 12. } \begin{vmatrix} 13 & 15 & 10 \\ 7 & 11 & 4 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix};$$

$$\text{IX. 13. } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{IX. 14. } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{IX. 15. } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}; \quad \text{IX. 16. } \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}.$$

IX. 17. Să se arate că determinantul

$$D_3 = \begin{vmatrix} b^2 \cdot c^2 & c^2 \cdot a^2 & a^2 \cdot b^2 \\ b^2 + bc + c^2 & c^2 + ac + a^2 & a^2 + ab + b^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

este divizibil prin $(ab + bc + ca)^2$ și să se afle cîtul.

IX. 18. Să se afle valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & x+y+z & xy+yz+zx & xyz \end{vmatrix}.$$

Aplicînd numai proprietățile determinanților, fără a-i dezvolta, să se arate că următorii determinanți au valoarea zero:

$$\text{IX. 19. } \begin{vmatrix} a-b & x(y-z) & 8 \\ b-c & y(z-x) & -5 \\ c-a & z(x-y) & -3 \end{vmatrix} \quad \text{IX. 20. } \begin{vmatrix} 2ab & a^2 + b^2 & a+b \\ a^2 + b^2 & 2ab & a+b \\ a+b & a+b & 2 \end{vmatrix};$$

$$\text{IX. 21. } \begin{vmatrix} \sin 2\alpha & \sin(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \gamma) \\ \sin(\alpha + \beta) & \sin 2\beta & \sin(\beta + \gamma) \\ \sin(\alpha + \gamma) & \sin(\beta + \gamma) & \sin 2\gamma \end{vmatrix}.$$

IX. 22. Se dă determinantul

$$A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Să se arate că dacă $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$ și $a_{ij} = a_{ji}$ ($i \neq j$), atunci

$$\left(\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \right)^2 = -a_{22} \cdot A_3.$$

IX. 23. Să se calculeze valoarea determinantului

$$D_n = \begin{vmatrix} n^2 & -n & -n & \dots & -n \\ -n & 2 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -n & 1 & 1 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

Să se calculeze produsul determinantilor și să se verifice rezultatul prin calcul direct:

$$\text{IX. 24.} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 11 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 35 & -51 & -2 \\ -19 & 28 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{IX. 25.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix};$$

IX. 26. Să se calculeze pătratul determinantului Vandermonde de ordinul al treilea

$$V_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}.$$

IX. 27. Să se arate că pătratul determinantului Vandermonde al elementelor $x_1, x_2, \dots, x_n$ poate fi pus sub forma

$$V_n^2(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \dots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1} & S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n-2} \end{vmatrix},$$

unde $S_p = x_1^p + \dots + x_n^p$. El se mai numește și discriminantul ecuației de gradul n : $x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n = 0$.

IX. 28. Să se afle valoarea determinantului matricei obținute făcând produsul matricei

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

cu matricea transpusă ei.

Să se determine rangul următoarelor matrice, prin aducere la forma canonică diagonală:

$$\text{IX. 29.} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \end{bmatrix}; \quad \text{IX. 30.} \begin{bmatrix} 4 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{bmatrix};$$

$$\text{IX. 31.} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{IX. 32.} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix};$$

$$\text{IX. 33.} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 6 & 8 & 2 \\ 0 & 5 & 9 & 12 & 7 \end{bmatrix}; \quad \text{IX. 34.} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Să se arate că următoarele matrice admit inverse și apoi să se determine inversele lor:

$$\text{IX. 35.} \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{IX. 36.} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$\text{IX. 37.} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Să se rezolve cu ajutorul calculului matriceal sistemele:

$$\text{IX. 38.} \begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ x + y - z = -2 \\ 4x - 2y + 3z = 12 \end{cases}; \quad \text{IX. 39.} \begin{cases} 2x + 4y + 3z = a \\ 2x + 3y + 4z = b \\ -y + z = c. \end{cases}$$

Să se rezolve următoarele ecuații matriceale:

$$\text{IX. 40.} X \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{bmatrix};$$

$$\text{IX. 41.} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \cdot Y = \begin{bmatrix} 1 & 15 & 3 \\ 43 & 29 & 21 \\ 13 & 35 & 2 \end{bmatrix}.$$

Să se rezolve următoarele sisteme de ecuații liniare:

$$\text{IX. 42. } \begin{cases} x + y + z = 1, \\ ax + by + cz = k, \\ a^2x + b^2y + c^2z = k^2. \end{cases} \quad \text{IX. 43. } \begin{cases} x + y + 2z + 3t = 2, \\ 3x - y - 4z - 6t = 0, \\ 2x + 3y - 6z - 9t = -7, \\ x - 2y + 8z - 12t = 5. \end{cases}$$

$$\text{IX. 44. } \begin{cases} x + y + z - 2t + 7u = 0, \\ 2x + \quad \quad \quad z - 2u = 9, \\ 3x + y - \quad \quad \quad t = 9, \\ \quad \quad 2y - 5z + \quad \quad u = -8, \\ x - y + \quad \quad \quad + 3t = 1. \end{cases}$$

IX. 45. Să se afle mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care sistemul

$$\begin{cases} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

este compatibil determinat și pentru aceste valori să se rezolve.

IX. 46. Să se determine $m \in R$ astfel ca sistemul

$$\begin{cases} 2x - 3y - 7 = 0 \\ 3x + 2my - 4 = 0 \\ mx - y - 3 = 0 \end{cases}$$

să fie compatibil.

Să se cerceteze dacă sistemele următoare admit soluții.

$$\text{IX. 47. } \begin{cases} x - y + 3z + t = -8, \\ 3x + y - z + 2t = -5, \\ 2x + 2y - 4z + t = 3. \end{cases} \quad \text{IX. 48. } \begin{cases} x + y + z + t = 10, \\ x + y - z - 2t = -8, \\ 5x + 5y - z - 4t = -4, \\ x + y + 3z + 4t = 28. \end{cases}$$

IX. 49. Să se discute după valorile parametrului real m sistemul

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1, \\ x - y + 2z = 2, \\ 2mx + m^2y + 3z = 3m. \end{cases}$$

În cazurile de compatibilitate să se rezolve.

IX. 50. Să se discute sistemul

$$\begin{cases} mx + y + z = 4, \\ x + ny + z = 3, \\ x + 2ny + z = 4, \end{cases}$$

după valorile parametrilor reali m și n .

IX. 51. Se dă sistemul

$$\begin{cases} (m+2)(x+y+z) = 3(10-m), \\ x - 2y + z = 0, \\ (m+2)(mx+y-mz) = 5(2-m); \end{cases}$$

- să se rezolve și să se discute după valorile parametrului real m ;
- să se afle mulțimea valorilor întregi ale lui m pentru care soluțiile sistemului sînt simultan întregi;
- să se determine mulțimea valorilor lui m pentru care soluțiile sistemului pot reprezenta laturile unui triunghi.

IX. 52. Să se arate că sistemul

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x + 3y - z = 0, \\ z - 2y + 10z = 0, \end{cases}$$

admite și soluții diferite de zero.

IX. 53. Să se discute și să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x - 3y + 4z = 0, \\ x + 2y + mz = 0, \\ 2x + my + 3z = 0, \end{cases} \quad m \in R.$$

IX. 54. Să se afle valorile lui m pentru care sistemul

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = mx, \\ 2x + 3y + z = my, \\ 3x + y + 2z = mz, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \end{cases}$$

este compatibil determinat și să se rezolve numai pentru valoarea întregă a lui m .

Să se rezolve sistemele:

$$\text{IX. 55. } \begin{cases} x + y - 3t - u = 0, \\ x - y + 2z - t = 0, \\ 4x - 2y + 6z + 3t - 4u = 0, \\ 2x + 4y - 2z + 4t - 7u = 0. \end{cases}$$

$$\text{IX. 56. } \begin{cases} x - 2y + z - t + u = 0, \\ 2x + y - z + 2t - 3u = 0, \\ 3x - 2y - z + t - 2u = 0, \\ 2x - 5y + z - 2t + 2u = 0. \end{cases}$$

IX. 57. Să se arate că

$$(1, -2, 1, 0, 0)$$

$$(1, -2, 0, 1, 0)$$

$$(5, -6, 0, 0, 1)$$

este un sistem fundamental de soluții pentru sistemul

$$\begin{cases} x + y + z + t + u = 0, \\ 3x + 2y + z + t - 3u = 0, \\ y + 2z + 2t + 6u = 0, \\ 5x + 4y + 3z + 3t - u = 0. \end{cases}$$

IX. 58. Să se scrie un sistem fundamental de soluții pentru sistemul de ecuații omogene

$$\begin{cases} x - 2y + z + t - u = 0, \\ 2x + y - z - t + u = 0, \\ x + 7y - 5z - 5t + 5u = 0, \\ 3x - y - 2z + t - u = 0. \end{cases}$$

Capitolul X

EXPRESII ALGEBRICE. POLINOAME. FRAȚII ALGEBRICE

PROBLEME REZOLVATE

X. 1. Se consideră

$$E = \frac{(a+x)^{\frac{1}{2}} + (a-x)^{\frac{1}{2}}}{(a+x)^{\frac{1}{2}} - (a-x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Să se calculeze valoarea expresiei pentru $x = \frac{2ab}{b^2 + 1}$, $a \in (0, +\infty)$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Rezolvare. Raționalizând numitorul, E se scrie

$$E = \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

Domeniul de definiție al expresiei E este: $x \in (-a, 0) \cup (0, a) = D$.

Pentru $x = \frac{2ab}{b^2 + 1} \in D$, $a^2 - x^2 = \frac{a^2(b^2 - 1)^2}{(b^2 + 1)^2} \geq 0$ și

$$E = \left(a + \frac{a|b^2 - 1|}{b^2 + 1} \right) \cdot \frac{b^2 + 1}{2ab} = \frac{b^2 + 1 + |b^2 - 1|}{2b}.$$

Pentru $b \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, $E = b$, iar pentru

$$b \in (-1, 0) \cup (0, 1), E = \frac{1}{b}.$$

X. 2. a) Să se determine mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care este definită aplicația $E: D \rightarrow R$, $D \subset R$,

$$E(x) = \frac{x-4}{x^2-2x+1} + \sqrt{\frac{x-1}{2x^2+3x-14}}.$$

b) Să se calculeze valoarea numerică a expresiei $E(x)$ pentru $x = -2$.

Rezolvare. a) $E(x)$ este definită pe mulțimea $D = A \cap B$, unde A este mulțimea valorilor lui x pentru care $\frac{x-4}{x^2-2x+1}$ are sens, iar B este mulțimea pe care este definită $\sqrt{\frac{x-1}{2x^2+3x-14}}$. Avem $A = R \setminus \{1\}$, iar pentru determinarea mulțimii se întocmește următorul tabel:

x	$-\infty$	$-\frac{7}{2}$	1	2	$+\infty$
$x-1$	-	-	0	+	+
$2x^2+3x-14$	+	+	0	0	+
$\frac{x-1}{2x^2+3x-14}$	-	-	+	+	+

Deci $B = \left(-\frac{7}{2}, 1\right] \cup (2, +\infty)$;

$$D = A \cap B = \{(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)\} \cap \left\{\left[-\frac{7}{2}, 1\right] \cup (2, +\infty)\right\} = \left(-\frac{7}{2}, 1\right) \cup (2, +\infty).$$

b) $x = -2 \in D$.

$$E(-2) = \frac{-6}{9} + \sqrt{\frac{-3}{-12}} = -\frac{1}{6}.$$

X. 3. Se dă aplicația $E: D \rightarrow R$, $D \subset R$.

$$E(x) = \log_{90}(2x^2 - 5x + 2) + \sqrt{\frac{\log_{0.5}(x^2 - 5x - 23)}{\lg(x^2 - 8)}}.$$

a) Să se determine valorile reale ale lui x pentru care $E(x)$ are sens.

b) Să se calculeze valoarea numerică a lui $E(x)$ pentru $x = 8$.
c) Să se arate că $E(x) > 0$, oricare ar fi $x \in D$.

Rezolvare. a) Trebuie să fie satisfăcute simultan condițiile:

$$2x^2 - 5x + 2 > 0, \quad (1)$$

$$\frac{\log_{0.5}(x^2 - 5x - 23)}{\lg(x^2 - 8)} \geq 0. \quad (2)$$

Din (1) rezultă $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$, iar pentru relația (2) se întocmește următorul tabel al semnelor

x	$-\infty$	-3	$\frac{5-3\sqrt{13}}{2}$	$-2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	3	$\frac{5+3\sqrt{13}}{2}$	$8+\infty$
$x^2-5x-23$	+	+	0	-	-	-	0	+
$x^2-5x-23 \geq 1$	>1	1					<1	1 >1
$\log_{0.5}(x^2-5x-23)$	-	-0	+	+				+ 0 -
x^2-8		+	+	+	0	-	0	+
$x^2-8 \geq 1$	>1	1					<1	1 >1
$\lg(x^2-8)$	+	+	0	-	-			-0 + +
$\frac{\log_{0.5}(x^2-5x-23)}{\lg(x^2-8)}$	-	-	+	+				+ 0 -

Deci (2) are loc pentru $x \in \left(\frac{5+3\sqrt{13}}{2}, 8\right]$. Rezultă că domeniul de definiție al lui $E(x)$ este:

$$D = \left\{\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)\right\} \cap \left(\frac{5+3\sqrt{13}}{2}, 8\right] = \left(\frac{5+3\sqrt{13}}{2}, 8\right].$$

b) $x = 8 \in D$ și deci

$$E(8) = \log_{90} 90 + \sqrt{\frac{\log_{0.5} 1}{\lg 56}} = 1.$$

c) Pentru a studia semnul expresiei $\log_{90}(2x^2 - 5x + 2)$ se întocmește următorul tabel:

x	$-\infty$	$\frac{5-\sqrt{17}}{4}$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{5+\sqrt{17}}{4}$	$+\infty$					
$2x^2 - 5x + 2$	+	+	+	0	-	-	0	+	+	+	
$2x^2 - 5x + 2 \geq 1$	>1	1		<1			1		>1		
$\log_{90}(2x^2 - 5x + 2)$	+	+	0	-		-	-	0	+	+	+

Rezultă că, pentru $x \in \left(-\infty, \frac{5-\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right)$; $\log_{90}(2x^2 - 5x + 2) \geq 0$, astfel că

$$E(x) > 0, \forall x \in D.$$

X. 4. Se consideră aplicația $E: D \rightarrow R, D \subset R$,

$$E(x) = (2x + 1) \cdot \left[\left(\frac{2x-1}{x+1} - \frac{x+2}{3(x-1)} + \frac{1}{3} - \frac{6x}{x+1} \right) : \frac{2x+1}{x-1} + 2 \right].$$

a) Să se găsească mulțimea valorilor lui x pentru care $E(x)$ nu are sens.

b) Să se aducă $E(x)$ la o formă mai simplă și să se calculeze $E(2)$.

c) Să se găsească mulțimea valorilor lui x pentru care $E(x)$ este număr întreg și pozitiv.

Rezolvare. a) $E(x)$ nu are sens pentru

$$x+1=0, x-1=0 \text{ și } \frac{2x+1}{x-1}=0 \Rightarrow D^* = \left\{ -1, -\frac{1}{2}, 1 \right\}.$$

b) Domeniul de definiție al lui $E(x)$ este

$$D = R \setminus D^* = (-\infty, -1) \cup \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty).$$

Pentru $x \in D$,

$$\begin{aligned} E(x) &= (2x+1) \cdot \left[\frac{6x^2-9x+3-x^2-3x-2+x^2-1-18x^2+18x}{3(x^2-1)} \cdot \frac{x-1}{2x+1} + 2 \right] = \\ &= \frac{-12x^2+6x}{3(x+1)} + 2(2x+1) = \frac{2(4x+1)}{x+1}. \end{aligned}$$

Pentru $x=2 \in D, E(2)=6$.

$$c) E(x) = \frac{2(4y+1)}{x+1} = k \in Z_+ \Rightarrow x = \frac{k-2}{8+k}, k=0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, \dots \text{ (pentru } k=5, x=1 \notin D).$$

În concluzie, valoarea lui $E(x)$ este un număr întreg și pozitiv pentru $x \in M = \left\{ x \mid x = \frac{k-2}{8+k}, k=0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, \dots \right\}$.

X. 5. Se dau polinoamele:

$$P_1(x) = (m^2 - 5m + 7)x^3 - (m^2 - 2)x^2 - m^2x + m^2 + 4,$$

$$P_2(x) = x^3 - mx^2 - (3m^2 - 5m + 2)x + 3m + 2, m \in R.$$

a) Să se determine valorile lui m pentru care polinoamele sînt egale.

b) Pentru m determinat la punctul a) să se descompună în factori.

Rezolvare. a) $P_1(x) = P_2(x)$ dacă coeficienții termenilor de același grad în x sînt egali, adică $m^2 - 5m + 7 = 1, m^2 - 2 = m, m^2 = 3m^2 - 5m + 2$. Aceste ecuații sînt satisfăcute simultan de $m = 2$.

Pentru $m = 2: P_1(x) = P_2(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$.

$$b) x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = x^2(x-2) - 4(x-2) = (x-2)^2 \cdot (x+2).$$

X. 6. Se dă polinomul

$$P(x, y) = a(b-c)x^2 + b(c-a)xy + c(a-b)y^2, a(b-c) > 0.$$

Să se arate că condiția necesară ca $P(x, y)$ să fie un pătrat perfect în R este ca numerele a, b, c să formeze o progresie armonică.

Rezolvare. $P(x, y)$ este o funcție de gradul al doilea în x și poate fi pus sub forma unui pătrat perfect dacă discriminantul este egal cu zero, adică $b^2(c-a)^2y^2 - 4ac(b-c) \cdot$

$$(a-b)y^2 = 0 \Rightarrow [b(a+c)-2ac]^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}.$$

În acest caz

$$P(x, y) = \left[\sqrt{a(b-c)} \cdot \left(x + \frac{b(c-a)y}{2a(b-c)} \right) \right]^2.$$

Observație. Se poate folosi și metoda coeficienților nedeterminați: $P(x, y) \equiv (mx + ny)^2$.

X. 7. Se dau polinoamele

$$P(x) = (m+1)x^3 + (m^2+3)x^2 + 5x + m-1 \text{ și } Q(x) = x^2 + mx + 1.$$

a) Să se determine parametrul real m astfel ca $P(x)$ să se dividă prin $Q(x)$.

b) Cu m astfel determinat, să se descompună în factori polinomul $P(x)$.

Rezolvare.

$$a) (m+1)x^3 + (m^2+3)x^2 + 5x + m - 1 \equiv (x^2 + mx + 1) \cdot (px + q).$$

Egalând coeficienții puterilor egale ale lui x se obține:

$$\begin{cases} m+1=p, \\ m^2+3=pm+q, \\ 5=mq+p, \\ m-1=q, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=m+1, \\ q=m-1, \\ m^2+3=m^2+m+m-1, \\ 5=m^2-m+m+1. \end{cases} \Rightarrow m=2, p=3, q=1.$$

b) Pentru $m=2$:

$$P(x) = 3x^3 + 7x^2 + 5x + 1 = (x^2 + 2x + 1)(3x + 1) = (x+1)^2(3x+1).$$

X. 8. Să se determine parametrii reali m și n astfel ca polinomul $P(x) = 3x^4 - 2x^2 + (2m - n - 1)x + m + 3n - 11$ să se dividă prin $Q(x) = x^2 - 3x + 2$.

Rezolvare. $Q(x) = (x-1)(x-2)$; $P(x)$ se divide prin $Q(x)$ dacă $P(1) = 0$, $P(2) = 0$ adică $3m + 2n - 7 = 0$, $5m + n + 35 = 0 \Rightarrow m = -11$, $n = 20$.

X. 9. Să se determine coeficienții reali a, b, c, d astfel ca polinomul $P(x) = x^4 - x^3 + ax^2 + bx + c$ împărțit prin $x^2 + d$ să dea restul x , iar împărțit prin $x^2 - d$ să dea restul $-x$.

Rezolvare.

$$x^4 - x^3 + ax^2 + bx + c \equiv (x^2 + d)(x^2 + mx + n) + x,$$

$$x^4 - x^3 + ax^2 + bx + c \equiv (x^2 - d)(x^2 + px + q) - x,$$

cu m, n, p, q coeficienți reali. Prin identificarea coeficienților se obține:

$$-1 = m, a = d + n, b = md + 1, c = nd - 1 = p, a = -d + q, b = -pd - 1,$$

$$c = -dq \Rightarrow a = 0, b = 0, c = -1, d = 1, m = -1, n = -1, p = -1, q = 1.$$

X. 10. Să se determine $m \in R$ astfel ca polinomul $P(x) = x^5 + (m+1)x^4 + 3mx^3 + (4m-1)x^2 + (3m-1)x - 5$ să se dividă prin $x^2 + 1$.

Rezolvare. Fie α o rădăcină a polinomului $x^2 + 1$:

$$\alpha^2 = -1, \alpha^3 = -\alpha, \alpha^4 = 1, \alpha^5 = \alpha \text{ și } P(\alpha) = \alpha + (m+1)\alpha^2 - 3m\alpha -$$

$$-(4m-1) + (3m-1)\alpha - 5 = m^2 - 2m - 3 = 0 \Rightarrow m_1 = -1, m_2 = 3.$$

Observații. 1) Metoda de rezolvare expusă este valabilă numai pentru polinoame cu coeficienți reali. În acest caz m se determină și din $P(i) = 0$, sau $P(-i) = 0$.

2) Restul împărțirii unui polinom $P(x)$ cu coeficienți reali de gradul n prin $x^2 + 1$ este $R(x) = x\varphi(-1) + \psi(-1)$, unde, $P(x) = x\varphi(x^2) + \psi(x^2)$. [$x\varphi(x^2)$ este polinomul format din toți termenii lui $P(x)$ cu puteri impare ale lui x , iar $\psi(x^2)$ este polinomul format din toți termenii lui $P(x)$ cu puteri pare ale lui x].

X. 11. Să se determine $m \in N$ pentru care polinomul $P(x) = (x+1)^m - x^m - 1$ să fie divizibil cu $Q(x) = x^2 + x + 1$.

Rezolvare. Fie α o rădăcină a lui $Q(x)$, adică $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ (α este o rădăcină complexă de ordinul al treilea a unității). Atunci, $\alpha + 1 = -\alpha^2 = \beta$ cu β o rădăcină complexă de ordinul 6 a unității [$\beta^6 = (-\alpha^2)^6 = (\alpha^3)^4 = 1$], $\beta^2 = (-\alpha^2)^2 = \alpha \cdot \alpha^3 = \alpha$ și $P(\alpha) = (\alpha+1)^m - \alpha^m - 1 = \beta^m - \beta^{2m} - 1$.

$$\text{Pentru: } m = 6n, \quad P(\alpha) = -1 \neq 0.$$

$$m = 6n + 1, \quad P(\alpha) = \beta - \beta^2 - 1 = -\alpha^2 - \alpha - 1 = 0,$$

$$m = 6n + 2, \quad P(\alpha) = \beta^2 - \beta^4 - 1 = \alpha - \alpha^2 - 1 \neq 0,$$

$$m = 6n + 3, \quad P(\alpha) = \beta^3 - 1 - 1 = -\alpha^3 - 2 = -3 \neq 0,$$

$$m = 6n + 4, \quad P(\alpha) = \beta^4 - \beta^2 - 1 = \alpha^2 - \alpha - 1 \neq 0,$$

$$m = 6n + 5, \quad P(\alpha) = \beta^5 - \beta^4 - 1 = -\alpha - \alpha^2 - 1 = 0.$$

Deci $P(x)$ este divizibil prin $Q(x)$ pentru $m = 6n + 1$ și $m = 6n + 5$, $n \in N$.

X. 12. Să se arate că polinomul

$$P(x) = x^n \sin \varphi - r^{n-1}x \sin n\varphi + r^n \sin (n-1)\varphi, \quad n \in N$$

este divizibil prin $Q(x) = x^2 - 2rx \cos \varphi + r^2$ și să se afle cîțul $C(x)$.

Rezolvare. Se împarte $P(x)$ la $Q(x)$ folosind relația

$$2 \cos \varphi \sin k\varphi - \sin(k-1)\varphi = \sin(k+1)\varphi, \quad k \in N:$$

$$\begin{array}{r|l} x^n \sin \varphi - r^{n-1}x \sin n\varphi + r^n \sin (n-1)\varphi & x^2 - 2rx \cos \varphi + r^2 \\ -x^n \sin \varphi + 2rx^{n-1} \cos \varphi \sin \varphi - r^2x^{n-2} \sin \varphi & x^{n-2} \sin \varphi + rx^{n-3} \sin 2\varphi + \\ \hline / rx^{n-1} \sin 2\varphi - r^2x^{n-2} \sin \varphi - r^{n-1}x \sin n\varphi + r^n \sin (n-1)\varphi & + \dots + r^{n-3}x \sin (n-2)\varphi + \\ -rx^{n-1} \sin 2\varphi + 2r^2x^{n-2} \cos \varphi \sin 2\varphi - r^3x^{n-3} \sin 2\varphi & + r^{n-2} \sin (n-1)\varphi \end{array}$$

$$/ r^2x^{n-2} \sin 3\varphi - r^3x^{n-3} \sin 2\varphi - r^{n-1}x \sin n\varphi + r^n \sin (n-1)\varphi$$

$$\dots$$

$$r^{n-3}x^3 \sin (n-2)\varphi - r^{n-2}x^2 \sin (n-3)\varphi - r^{n-1}x \sin n\varphi + r^n \sin (n-1)\varphi$$

$$-r^{n-3}x^3 \sin (n-2)\varphi + 2r^{n-2}x^2 \cos \varphi \sin (n-2)\varphi - r^{n-1}x \sin (n-2)\varphi$$

$$r^{n-2}x^2 \sin (n-1)\varphi - 2r^{n-1}x \sin (n-1)\varphi \cos \varphi + r^n \sin (n-1)\varphi$$

$$-r^{n-2}x^2 \sin (n-1)\varphi + 2r^{n-1}x \sin (n-1)\varphi \cos \varphi - r^n \sin (n-1)\varphi$$

Deci

$$P(x) = Q(x) \cdot [x^{n-2} \sin \varphi + rx^{n-3} \sin 2\varphi + \dots + r^{n-3}x \sin (n-2)\varphi + r^{n-2} \sin (n-1)\varphi].$$

X. 13. Să se afle condiția ca polinomul cu coeficienți reali $P(x) = x^5 + 10ax^3 + 5bx + c$ să aibă o rădăcină triplă diferită de zero.

Rezolvare. Fie $x = \alpha \neq 0$ o rădăcină triplă. Trebuie ca $P(\alpha) = 0$, $P'(\alpha) = 0$, $P''(\alpha) = 0$, $P'''(\alpha) \neq 0$, adică:

$$\begin{cases} \alpha^5 + 10a\alpha^3 + 5b\alpha + c = 0, \\ \alpha^4 + 6a\alpha^2 + b = 0, \\ \alpha^3 + 3a\alpha = 0, \\ \alpha^2 + a \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a\alpha^3 + 4b\alpha + c = 0, \\ 3a\alpha^2 + b = 0, \\ \alpha^2 = -3a, \\ \alpha^2 + a \neq 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8a\alpha^3 - c = 0, \\ b = 9a^2, \\ \alpha^2 = -3a, \\ \alpha^2 + a \neq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24a^2\alpha + c = 0 \\ \alpha^2 = -3a, \\ b = 9a^2, \\ a \neq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{c}{24a^2}, \\ \frac{c^2}{576a^4} = -3a, \\ b = 9a^2, \\ a \neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1728a^5 + c^2 = 0, \\ b = 9a^2, \\ a \neq 0. \end{cases} \quad [\text{condiția ca } P(x) \text{ să admită o rădăcină triplă diferită de zero}].$$

Pentru $a = 0$, ecuația $P(x) = 0$ nu poate admite o rădăcină triplă diferită de zero.

X. 14. Să se determine un polinom $P(x)$ de gradul 5 astfel ca $P(x) + 8$ să fie divizibil prin $(x+1)^3$ și $P(x) - 8$ să fie divizibil prin $(x-1)^3$.

Rezolvare. $P(x) + 8 = (ax^2 + bx + c)(x+1)^3$, adică $P(x) \equiv (ax^2 + bx + c) \cdot (x+1)^3 - 8$ și $P(x) - 8 = (ax^2 + bx + c)(x-1)^3 - 16 = Q(x)$ divizibil prin $(x-1)^3 \Rightarrow Q(1) = 0$, $Q'(1) = 0$, $Q''(1) = 0$, $Q'''(1) \neq 0 \Rightarrow a + b + c - 2 = 0$, $7a + 5b + 3c = 0$, $19a + 9b + 3c = 0 \Rightarrow a = 3$, $b = -9$, $c = 8$ și $P(x) = (3x^2 - 9x - 8)(x+1)^3 - 8 = 3x^5 - 10x^3 + 15x$.

Observație. Se poate folosi metoda coeficienților nedeterminați: $(ax^2 + bx + c)(x+1)^3 - 16 \equiv (x-1)^3(ax^2 + mx + n) \Rightarrow 3a + b = -3a + m$, $3a + 3b + c = 3a + 3m + n$, $a + 3b + 3c = -a + 3m - 3n$, $b + 3c = -m + 3c$, $c - 16 = -n \Rightarrow a = 3$, $b = -9$, $c = 8$, $m = 9$, $n = 8$.

X. 15. a) Să se determine un polinom $P(x)$ de gradul 3 astfel ca: $P(0) = 1$, $P(1) = 4$, $P(3) = 40$, $P(5) = 156$.

b) Să se determine polinomul $Q(x)$ astfel ca:

$$Q(x+1) - Q(x) = P(x),$$

$$Q(1) = 0.$$

c) Să se calculeze suma $S_n = P(1) + P(2) + \dots + P(n)$.

Rezolvare. a) Polinomul $P(x)$ de gradul 3 este de forma $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, care pentru $x = 0, 1, 3$ și 5 conduce la sistemul: $a_0 = 1$, $a_3 + a_2 + a_0 = 4$, $27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 40$, $125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + a_0 = 156$ cu soluția $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 1$. Deci $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

b) Din $Q(x+1) - Q(x) = P(x)$, un polinom de gradul 3, rezultă că $Q(x)$ este un polinom de gradul 4: $Q(x) = b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$. Se obține $Q(x+1) - Q(x) = 4b_4x^3 + (6b_4 + 3b_3)x^2 + (4b_4 + 3b_3 + 2b_2)x + b_4 + b_3 + b_2 + b_1 = x^3 + x^2 + x + 1$. Identificând coeficienții se obține sistemul: $4b_4 = 1$, $6b_4 + 3b_3 = 1$, $4b_4 + 3b_3 + 2b_2 = 1$, $b_4 + b_3 + b_2 + b_1 = 1$ cu soluțiile $b_4 = \frac{1}{4}$, $b_3 = -\frac{1}{6}$, $b_2 = \frac{1}{4}$, $b_1 = \frac{2}{3}$.

Deci $Q(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x + b_0$ și folosind condiția $Q(1) = 0$ se

găsește $b_0 = -1$, astfel că $Q(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x - 1$.

c) Dând lui x valorile $1, 2, \dots, n-1, n$ în egalitatea $Q(x+1) - Q(x) = P(x)$ se obține:

$$\begin{aligned} Q(2) - Q(1) &= P(1), \\ Q(3) - Q(2) &= P(2), \\ &\dots \dots \dots \\ Q(n) - Q(n-1) &= P(n-1), \\ Q(n+1) - Q(n) &= P(n). \end{aligned}$$

Adunând aceste relații membru cu membru: $Q(n+1) - Q(1) = \sum_{k=1}^n P(k)$.

Dar $Q(1) = 0$ și deci $S_n = \sum_{k=1}^n P(k) = Q(n+1) = \frac{1}{4}(n+1)^4 - \frac{1}{6}(n+1)^3 + \frac{1}{4}(n+1)^2 + \frac{2}{3}(n+1) - 1 = \frac{n(3n^3 + 10n^2 + 15n + 20)}{12}$.

X. 16. Folosind schema lui Horner, să se dezvolte polinomul $P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ după puterile lui $x+1$.

Rezolvare. Fie $P(x)$ un polinom de gradul n ; se dezvoltă după puterile lui $x+a$.

Se obține $P(x) = (x+a) \cdot C_1(x) + R_1 = (x+a) \cdot [(x+a) \cdot C_2 + R_2] + R_1 = (x+a) \{ (x+a) \cdot [(x+a) \cdot C_3 + R_3] + R_2 \} + R_1 = \dots = (x+a)^n \cdot C_n + (x+a)^{n-1} \cdot R_n + (x+a)^{n-2} \cdot R_{n-1} + \dots + (x+a) \cdot R_2 + R_1$.

Pentru determinarea resturilor împărțirilor succesive ale polinomului $P(x)$ prin $x+1$ se întocmește schema lui Horner:

x^4	x^3	x^2	x	x^0	R	
1	2	-3	-4	1		
	1	1	-4	0	1	-1
		1	0	-4	4	-1
			1	-1	-3	-1
				1	-2	-1

Deci

$$P(x) = (x+1)^4 - 2(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 4(x+1) + 1.$$

X. 17. Să se găsească c.m.m.d.c. al polinoamelor:

$$A(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 5x - 2,$$

$$B(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x + 2,$$

$$C(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 1.$$

Rezolvare. Pentru aflarea c.m.m.d.c. se folosește algoritmul lui Euclid al împărțirilor succesive. Împărțind $A(x)$ la $B(x)$ se obține restul $R_1(x) = -4(x^3 - 2x + 1) = -4R'_1(x)$ și împărțind $B(x)$ la $R'_1(x)$ se obține restul zero. Ultimul rest diferit de zero, abstracție făcând de factorii constanți, adică ultimul împărțitor din șirul împărțirilor succesive care face ca restul să fie zero, reprezintă c.m.m.d.c. al polinoamelor date. Deci c.m.m.d.c. al polinoamelor $A(x)$ și $B(x)$ este $R'_1(x) = x^3 - 2x + 1$. Folosind același procedeu se află c.m.m.d.c. al polinoamelor $C(x)$ și $R'_1(x)$; se obține $D(x) = x^2 + x - 1$. Rezultă că c.m.m.d.c. al polinoamelor $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ este $D(x) = x^2 + x - 1$.

X. 18. Se dau polinoamele:

$P_1(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$, $P_2(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$ și fie $D(x)$ c.m.m.d.c. al lor. Să se determine polinoamele $Q_1(x)$ și $Q_2(x)$ de gradele cele mai mici, astfel încât $P_1(x) \cdot Q_1(x) + P_2(x) \cdot Q_2(x) = D(x)$.

Rezolvare. Folosind algoritmul lui Euclid se obține:

$D(x) = x^2 - 2$ și $P_1(x) = (x^2 - 2) \cdot (x + 1)^2$, $P_2(x) = (x^2 - 2)(x^2 + x + 1)$. Atunci $(x^2 - 2) [(x + 1)^2 \cdot Q_1(x) + (x^2 + x + 1)Q_2(x)] = x^2 - 2$, de unde $(x^2 + 2x + 1) \cdot Q_1(x) + (x^2 + x + 1)Q_2(x) \equiv 1 \Rightarrow Q_1(x)$ și $Q_2(x)$ trebuie să aibă același grad. Deoarece $Q_1(x)$ și $Q_2(x)$ sunt polinoame de gradele cele mai mici, se observă că nu pot fi de gradul zero și se caută $Q_1(x) = ax + b$, $Q_2(x) = cx + d$. Înlocuind și identificând se obține sistemul: $a + c = 0$, $2a + b + c + d = 0$, $a + 2b + c + d = 0$, $b + d = 0$ cu soluțiile: $a = -1$, $b = -1$, $c = 1$, $d = 2$ și prin urmare $Q_1(x) = -x - 1$, $Q_2(x) = x + 2$.

X. 19. Se dau polinoamele:

$$A(x) = x^6 - x^5 - 3x^4 + x^3 - 4x - 3, B(x) = 2x^4 - 6x^2 - 8x - 6 \text{ cu } x \in R;$$

a) să se determine c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. al acestor polinoame;

b) să se transforme fracția $F(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ într-o fracție ireductibilă.

Rezolvare. Se folosește algoritmul lui Euclid al împărțirilor succesive: împărțind $A(x)$ la $B(x)$ se obține restul $R_1(x) = 2x^3 - x^2 - 7x - 3$; împărțind $B(x)$ la $R_1(x)$ se obține restul $R_2(x) = 3(x^2 - x - 3) = 3R'_2(x)$; împărțind $R_1(x)$ la $R'_2(x)$ se obține restul zero. Deci c.m.m.d.c. $(A, B) = R'_2(x) = x^2 - x - 3$.

Pentru aflarea c.m.m.m.c. al polinoamelor date, notat $[A, B]$, se face produsul polinoamelor și se împarte acest produs prin c.m.m.d.c., sau, ceea ce este același lucru, împărțind unul dintre polinoame, de exemplu $A(x)$ la c.m.m.d.c. (A, B) și înmulțind citul cu celălalt polinom, adică $B(x)$. Se obține

$$[A, B] = 2x^8 - 6x^6 - 6x^5 - 4x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 14x - 6.$$

Fracția

$$F(x) = \frac{x^6 - x^5 - 3x^4 + x^3 - 4x - 3}{2x^4 - 6x^2 - 8x - 6} = \frac{(x^2 - x - 3)(x^4 + x + 1)}{2(x^2 - x - 3)(x^2 + x + 1)}$$

are sens pentru acele valori reale ale lui x pentru care numitorul este diferit de zero, adică $x \in D = R \setminus \left\{ \frac{1 - \sqrt{13}}{2}, \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right\}$. Pentru orice $x \in D$ se poate simplifica fracția cu c.m.m.d.c. al numărătorului și numitorului și fracția se transformă într-o fracție ireductibilă:

$$F(x) = \frac{x^4 + x + 1}{2(x^2 + x + 1)}.$$

X. 20. Să se simplifice fracția

$$F(x) = \frac{x^4 - 10x^2 + 1}{x^4 - 4\sqrt{2} \cdot x^3 + 6x^2 + 4\sqrt{2} \cdot x + 1}, \quad x \text{-real.}$$

Rezolvare. Fracția se simplifică prin c.m.m.d.c. al polinoamelor de la numărător și numitor, care se află prin algoritmul lui Euclid. Împărțind numitorul la numărător se obține restul $R_1(x) = -4\sqrt{2} \cdot (x^3 - 2\sqrt{2} \cdot x^2 - x) = -4\sqrt{2} \cdot R'_1(x)$; împărțind numărătorul la $R'_1(x)$ se obține restul $R_2(x) = -(x^2 - 2\sqrt{2} \cdot x - 1)$; împărțind $R'_1(x)$ la $-R_2(x)$ se obține restul zero. Deci c.m.m.d.c. al polinoamelor de la numărător și numitor este $D(x) = -R_2(x) = x^2 - 2\sqrt{2} \cdot x - 1$. Fracția se simplifică prin $D(x) = x^2 - 2\sqrt{2} \cdot x - 1$:

$$F(x) = \frac{x^2 + 2\sqrt{2} \cdot x - 1}{x^2 - 2\sqrt{2} \cdot x - 1}, \quad x \in R \setminus \{\sqrt{2} - \sqrt{3}, \sqrt{2} + \sqrt{3}\}.$$

X. 21. Să se determine $m \in R$ astfel ca fracția

$$F(x) = \frac{(mx + y + z)^3 + (x + my + z)^3 + (x + y + mz)^3}{(x + y)^3 + (y + z)^3 + (z + x)^3}$$

să fie independentă de $x, y, z \in R$.

Rezolvare. Fie $k \in R$ valoarea fracției, care nu depinde de x, y, z :

$$(mx + y + z)^3 + (x + my + z)^3 + (x + y + mz)^3 \equiv k[(x + y)^3 + (y + z)^3 + (z + x)^3]. \quad (1)$$

Folosind

$$(A + B + C)^3 = A^3 + B^3 + C^3 + 3A^2(B + C) + 3B^2(A + C) + 3C^2(A + B) + 6ABC$$

se observă că în partea stângă a identității (1) apare termenul $18mxyz$, pe cînd în partea dreaptă nu apare, adică coeficientul lui xyz trebuie să fie zero. Deci $m = 0$ și în acest caz $F = 1$.

X. 22. Să se determine toate valorile posibile ale parametrului real m , astfel încât fracția

$$F(x) = \frac{x^4 + m^2x^3 + (m+1)x^2 + (4m+1) \cdot n - 3}{x^2 - 1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

să se simplifice; să se facă simplificarea corespunzătoare fiecăreia din valorile obținute pentru m .

Rezolvare. Fracția se poate simplifica prin $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ sau prin unul din factorii $x-1$, $x+1$. Pentru determinarea lui m folosim teorema lui Bézout. Dacă $P(x)$ este polinomul de la numărător, trebuie să rezulte:

a) $P(1) = 0$ adică $m^2 + 5m = 0 \Rightarrow m_1 = 0, m_2 = -5$.

Pentru $m = 0$; $F(x) = \frac{x^3 + x^2 + 2x + 3}{x + 1}$.

Pentru $m = -5$; $F(x) = \frac{x^3 + 26x^2 + 22x + 3}{x + 1}$.

b) $P(-1) = 0$, adică $m^2 + 3m + 2 = 0 \Rightarrow m_1 = -2, m_2 = -1$.

Pentru $m = -2$; $F(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 3}{x - 1}$.

Pentru $m = -1$; $F(x) = \frac{x^3 - 3}{x - 1}$.

c) Deoarece condițiile $P(1) = 0$ și $P(-1) = 0$ nu pot fi satisfăcute simultan, simplificarea cu $x^2 - 1$ nu este posibilă.

X. 23. Se consideră fracția $\frac{6x^4 - 35x^3 + 62x^2 + ax + b}{6x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 1}$ unde a și b sînt numere reale.

a) Să se determine a și b astfel încât fracția dată să se simplifice cu un polinom de gradul al doilea, iar fracția $F(x)$ obținută după simplificare să fie definită pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se găsească valorile lui x pentru care $F(x) < 2$.

Rezolvare. a) Se descompune numitorul în factori:

$$\begin{aligned} 6x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 1 &= 6x^2(x^2 + 1) - 5x(x^2 + 1) + x^2 + 1 = \\ &= (x^2 + 1)(6x^2 - 5x + 1) = (x^2 + 1)(2x - 1)(3x - 1). \end{aligned}$$

Pentru ca fracția obținută după simplificare să fie definită pentru orice $x \in \mathbb{R}$ trebuie ca fracția dată să se simplifice prin $6x^2 - 5x + 1 = (2x - 1)(3x - 1)$, adică trebuie să rezulte $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $P\left(\frac{1}{3}\right) = 0$, unde $P(x) = 6x^4 - 35x^3 + 62x^2 + ax + b$. Se obține sistemul $a + 2b = -23$, $a + 3b = -17$ cu soluția $a = -35$, $b = 6$.

Pentru $a = -35$, $b = 6$, $F(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 1}$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 1} < 2 &\Rightarrow \frac{-x^2 - 5x + 4}{x^2 + 1} < 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{-5 - \sqrt{41}}{2}\right) \cup \\ &\cup \left(\frac{-5 + \sqrt{41}}{2}, +\infty\right). \end{aligned}$$

X. 24. Să se descompună în elemente simple fracția

$$F(x) = \frac{x - 3}{x(x - 1)(x + 1)}.$$

Rezolvare. Deoarece numitorul fracției are numai rădăcini reale simple, se scrie fracția sub următoarea formă aditivă:

$$F(x) = \frac{x - 3}{x(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 1}.$$

Aducînd la același numitor în partea a doua a egalității și ordonînd după puterile descrescătoare ale lui x , rezultă identitatea $(A + B + C)x^2 + (B - C)x - A \equiv x - 3 \Rightarrow A + B + C = 0$, $B - C = 1$, $-A = -3 \Rightarrow A = 3$, $B = -1$, $C = -2$ și $F(x) = \frac{3}{x} - \frac{1}{x - 1} - \frac{2}{x + 1}$.

Observație. Coeficienții A, B, C se obțin imediat dacă în identitatea $A(x - 1) \cdot (x + 1) + Bx(x + 1) + Cx(x - 1) \equiv x - 3$, se înlocuiește succesiv $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$.

X. 25. Folosind schema lui Horner să se descompună în fracții simple

$$F(x) = \frac{x^3 - x + 1}{(x - 2)^5}.$$

Rezolvare. Se dezvoltă $x^3 - x + 1$ după puterile lui $x - 2$ cu ajutorul schemei lui Horner:

x^3	x^2	x	x^0	R	
1	0	-1	1		
	1	2	3	7	2
		1	4	11	2
			1	6	2

Deci

$$\begin{aligned} x^3 - x + 1 &= (x - 2)^3 + 6(x - 2)^2 + 11(x - 2) + 7 \text{ și } F(x) = \frac{1}{(x - 2)^2} + \frac{6}{(x - 2)^3} + \\ &+ \frac{11}{(x - 2)^4} + \frac{7}{(x - 2)^5}. \end{aligned}$$

X. 26. Să se descompună în elemente simple fracția

$$F(x) = \frac{x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 10}{(x-3) \cdot (x+1)^2}.$$

Rezolvare. Deoarece gradul numărătorului este mai mare cu o unitate decât gradul numitorului se efectuează împărțirea și se obține următoarea descompunere:

$$F(x) = x - 2 + \frac{-7x + 4}{(x-3)(x+1)^2} = x - 2 + \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

Aducând la același numitor în partea a doua a egalității, putem scrie identitatea $A(x+1)^2 + B(x+1)(x-3) + C(x-3) \equiv -7x + 4$, în care se înlocuiește succesiv $x = 3$, $x = -1$, se obține $A = -\frac{17}{16}$, $C = -\frac{11}{4}$. În plus, din identitate se observă că

coeficientul lui x^2 este zero, adică $A + B = 0$, și prin urmare $B = -A = \frac{17}{16}$.

Deci

$$F(x) = x - 2 - \frac{17}{16(x-3)} + \frac{17}{16(x+1)} - \frac{11}{4(x+1)^2}.$$

X. 27. Să se descompună în elemente simple fracția

$$F(x) = \frac{2x^2 - 8x - 41}{(x-2)(x^2+3)^2}.$$

Rezolvare. Deoarece numitorul are atât rădăcini reale simple cit și rădăcini imaginare multiple rezultă

$$F(x) = \frac{2x^2 - 8x - 41}{(x-2)(x^2+3)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+3} + \frac{Dx+E}{(x^2+3)^2}.$$

Aducând la același numitor, putem scrie identitatea $A(x^2+3)^2 + (Bx+C)(x^2+3) \cdot (x-2) + (Dx+E)(x-2) \equiv 2x^2 - 8x - 41$, care pentru $x = 2$, dă $A = -1$. Efectuând calculele, identitatea devine: $(-1+B)x^4 + (-2B+C)x^3 + (-6+3B-2C+D)x^2 + (-6B+3C-2D+E)x - 9-6C-2E \equiv 2x^2 - 8x - 41$, de unde se obține sistemul: $-1+B=0$; $-2B+C=0$, $-6+3B-2C+D=2$; $-6B+3C-2D+E=-8$; $-9-6C-2E=-41 \Rightarrow B=1$, $C=2$, $D=9$, $E=10$ și

$$F(x) = \frac{2x^2 - 8x - 41}{(x-2) \cdot (x^2+3)^2} = -\frac{1}{x-2} + \frac{x+2}{x^2+3} + \frac{9x+10}{(x^2+3)^2}.$$

X. 28. Să se descompună în elemente simple fracția

$$F(x) = \frac{2x^2 + x}{x^4 - 2x^2 \cos 2\alpha + 1}.$$

Rezolvare. $x^4 - 2x^2 \cos 2\alpha + 1 = (x^2 + 1)^2 - 4x^2 \cos^2 \alpha = (x^2 + 1 - 2x \cos \alpha)(x^2 + 1 + 2x \cos \alpha)$.

Fiecare factor fiind un trinom de gradul al doilea cu rădăcini complexe pentru $\alpha \neq k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), rezultă următoarea scriere aditivă a fracției:

$$F(x) = \frac{2x^2 + x}{x^4 - 2x^2 \cos 2\alpha + 1} = \frac{Ax+B}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} + \frac{Cx+D}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1}.$$

De aici se obține identitatea

$$(A+C)x^3 + (2A \cos \alpha - 2C \cos \alpha + B+D)x^2 + (A+2B \cos \alpha + C-2D \cos \alpha)x + B+D = 2x^2 + x.$$

Din identitate se observă că coeficientul lui x^3 este zero, adică $A+C=0$, de unde $C=-A$. Înlocuind $x=0$ în identitate se obține $B+D=0$, sau $D=-B$. Pentru $C=-A$, $D=-B$, identitatea se scrie:

$$(Ax+B) \cdot 4x \cos \alpha = 2x^2 + x \text{ de unde } A = \frac{1}{2 \cos \alpha}, \quad B = \frac{1}{4 \cos \alpha}$$

și deci:

$$F(x) = \frac{2x^2 + x}{x^4 - 2x^2 \cos 2\alpha + 1} = \frac{1}{4 \cos \alpha} \left(\frac{2x+1}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} - \frac{2x+1}{x^2 + 2x \cos \alpha + 1} \right).$$

Observație. Pentru $x = k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$),

$$F(x) = \frac{2x^2 + x}{x^4 - 2x^2 + 1} = \frac{2x+1}{4(x-1)^2} - \frac{2x+1}{4(x+1)^2} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{3}{4(x-1)^2} - \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{4(x+1)^2}.$$

PROBLEME PROPUSE

Să se scrie sub o formă mai simplă expresiile:

$$\text{X. 1. } E = \frac{|2x+3| + |x-2| + 3x+1}{6x^2 + 11x + 3}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2}, -\frac{1}{3} \right\}.$$

$$\text{X. 2. } E = \frac{5x - 80x^3}{\sqrt{1 - (6x - 32x^3)^2}}, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} \right) \cup \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right).$$

$$\text{X. 3. } E = \sqrt{\frac{2x-3a}{7a} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{2x-4a}{a}}} - \sqrt{\frac{2x-3a}{7a} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{2x-4a}{a}}}, \quad a > 0.$$

Să se determine mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care sînt definite aplicațiile $E: D \rightarrow R, D \subset R$.

$$\text{X. 4. } E(x) = \frac{x-2}{3x^2+6x-9} + \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-2x-3}}.$$

$$\text{X. 5. } E(x) = \lg \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \sqrt{\log_{0.5} [\log_4(x-1)]}.$$

X. 6. Se dă aplicația $E: D \rightarrow R, D \subset R$,

$$E(x) = \frac{(x+1)^4 - 1}{x(x+2)} - (x-1) \cdot \sqrt{\frac{(x+1)(x^3+1)}{x^2-x+1}}.$$

a) Să se determine domeniul de definiție D .

b) Să se aducă la forma cea mai simplă.

X. 7. Se consideră aplicația $E: D \rightarrow R, D \subset R$,

$$E(x) = \frac{27x^3+1}{x^2(x+1)} : \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1-2x}{x(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} \right] - 9x^3 + 2.$$

a) Să se găsească mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $E(x)$ nu are sens.

b) Să se aducă $E(x)$ la forma cea mai simplă și să se afle mulțimea valorilor lui x pentru care $E(x) = 7$.

$$\text{X. 8. Se dă } E = \frac{a^3+b^3-2ab \cdot \sqrt{ab}}{a \cdot \sqrt{a-b} \cdot \sqrt{b}} - \frac{a^3+b^3-2ab \cdot \sqrt{ab}-ab}{a \cdot \sqrt{a-b} \cdot \sqrt{b} + \sqrt{ab}}.$$

a) Să se aducă E la o formă mai simplă.

b) Să se afle valoarea numerică a lui E pentru $a = 2 + \sqrt{3}, b = 2 - \sqrt{3}$.

$$\text{X. 9. Se consideră } E = \left[\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + 1}{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - 1} \right]^{-\frac{1}{2}} + \left[\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - 1}{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + 1} \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

a) Să se determine valoarea lui E pentru

$$x = 2a^{\frac{1}{2}} \cdot (1+a)^{-1}, \quad a \in (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

b) Egalînd rezultatul aflat la punctul a) cu $a + 4\sqrt{a} - 3$, să se determine valoarea lui a .

X. 10. Se dă

$$E = \left(\frac{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} - \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\frac{1}{a^2} + 1}{\frac{1}{a^2} - 1} + \frac{\frac{1}{a^2} - 1}{\frac{1}{a^2} + 1} - \frac{4}{a-1} \right)^{-1}, \quad a \neq b > 0.$$

a) Să se aducă E la o formă mai simplă.

b) Să se calculeze valoarea numerică a lui E pentru $a = 1 + \sqrt{2}, b = 3 - 2\sqrt{2}$.

Să se descompună în factori cu coeficienți reali polinoamele:

$$\text{X. 11. } (2x-3)^2 + 4x^2 + 4x - 15. \quad \text{X. 12. } 4x^2 + 4xy + y^2 + y - 2.$$

$$\text{X. 13. } x^4 + 2.$$

$$\text{X. 14. } 4x^4 + 2x^2y^2 + y^4.$$

$$\text{X. 15. } x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz(x+y+z).$$

$$\text{X. 16. Se dă polinomul } P(x) = x^4 + 2x^3 + mx^2 + nx + p.$$

Să se afle m, n, p astfel ca $P(x)$ să fie divizibil cu $x-1, x+1$, iar $P(-2) = 1$.

X. 17. Să se arate că polinomul

$$P(x) = (x^2 + x - 2)^{2n+1} - 10(x^2 - 2x + 1)^n \cdot (x + 2)^{2n}, \quad n \in N$$

este divizibil prin polinomul $Q(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$.

X. 18. Să se arate că polinomul:

$P(x, y, z) = (x + y + z)^{2n+1} - x^{2n+1} - y^{2n+1} - z^{2n+1}, \quad n \in N$ se divide prin polinomul $Q(x, y, z) = (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$.

X. 19. Se dă polinomul $P(x) = (b-a)x^n + 2^na - b, \quad n \in N$.

a) Știind că $a = 1$, să se găsească valoarea lui b pentru care polinomul dat se divide cu $2-x$ și să se afle în acest caz cîtul.

b) Pentru ce valori ale lui a și b restul împărțirii polinomului $P(x)$ prin $x^2 - 3x + 2$ este egal cu $(2^n - 1)x$.

X. 20. Se dau polinoamele:

$$P(x) = x^3 + mx + 2 \text{ și } Q(x) = x^2 + (m+1)x + 1.$$

a) Să se determine parametrul m astfel ca polinoamele să se împartă exact.

b) Cu m astfel determinat, să se descompună în factori polinomul $P(x)$.

X. 21. Se dau polinoamele:

$$P(x) = x^4 - 3x^2 + mx + n \text{ și } Q(x) = x^2 - 3x + 2.$$

Să se determine $m, n \in R$ astfel încât $P(x)$ să se dividă prin $Q(x)$.

X. 22. Se dă polinomul:

$$P(x) = 6x^4 + 2x^3 + 11x^2 + (2m - 3n - 4)x + \frac{4m - 9n + 2}{n}. \text{ Să se determine } m, n \in R \text{ astfel încât polinomul dat, să se dividă cu } x^2 + 2.$$

C. 23. Să se arate că polinomul $(\cos a + x \sin a)^n - (\cos na + x \sin na)$ este divizibil prin $x^2 + 1$, oricare ar fi $n \in N$.

X. 24. Se dau polinoamele: $P(x) = x^{3a} + x^{3b+1} + x^{3c+2}$, $Q(x) = x^2 + x + 1$. Să se arate că $P(x)$ se divide cu $Q(x)$, oricare ar fi numerele naturale a, b, c .

X. 25. Să se determine valorile lui $m \in N$ pentru care polinomul $(x+1)^m + x^m + 1$ este divizibil prin $x^2 + x + 1$.

X. 26. Să se arate că polinomul $(x-1)^{2n+1} + (-1)^{n+1} \cdot x^{n+2}$, $n \in N$ se divide prin $x^2 - x + 1$.

X. 27. Se dă polinomul $P(x) = x^{2m} - 12x^m + 32$, $m \in N$.

a) Să se afle valorile lui m pentru care polinomul este divizibil cu $x - 2$.

b) Fie $m_1 < m_2$ valorile găsite pentru m și $P_1(x)$, $P_2(x)$ polinoamele corespunzătoare. Să se găsească toate rădăcinile polinomului $P_2(x)$.

c) Să se determine rădăcinile polinomului $Q(x) = P_2(x) - P_1(x)$.

X. 28. Se dă polinomul $P(x) = x(x+1)(x+2)$.

a) Să se determine polinomul $Q(x)$ astfel ca:

$$Q(x+1) - Q(x) = P(x),$$

$$Q(1) = 0.$$

b) Să se calculeze suma $S_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) \cdot (n+2)$.

X. 29. a) Să se determine polinomul $P(x)$ de gradul al doilea știind că $P(0) = 3$, $P(1) = 4$, $P(3) = 18$.

b) Să se determine polinomul $Q(x)$ astfel ca

$$\begin{cases} Q(x+1) - Q(x) = P(x), \\ Q(1) = 0, \end{cases}$$

cu $P(x)$ determinat la punctul a). Să se calculeze apoi suma $P(1) + P(2) + \dots + P(x)$.

c) Aplicând aceeași metodă să se calculeze suma cuburilor primelor n numere impare: $1^3 + 3^3 + \dots + (2n-1)^3$.

X. 30. Să se găsească un polinom $P(x)$ de gradul 4 astfel încât $P(x) + 1$ să admită rădăcina triplă $x = 1$, iar $P(x) - 1$ să admită rădăcina dublă $x = -1$.

X. 31. Se dă polinomul $P(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

a) Să se determine a_3, a_2, a_1, a_0 , știind că prin împărțirea polinomului $P(x)$ la : 1) $x^2 + x + 1$ se obține restul $4x - 1$; 2) $x - 1$ se obține restul 48; 3) $x + 3$ se obține restul 8.

b) Cu coeficienții a_3, a_2, a_1, a_0 determinați, să se descompună polinomul în factori.

X. 32. Se dă polinomul $P(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Să se determine a_3, a_2, a_1, a_0 știind că polinomul dă același rest prin împărțire la : $(x-1)^2$, $(x-2)$, $(x+2)$.

Folosind schema lui Horner să se dezvolte polinoamele $P(x)$ după puterile lui $x - x_0$.

X. 33. $P(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90$, $x_0 = 2$.

X. 34. $P(x) = x^4 + 2ix^3 - (1+i)x^2 - 3x + 7 + i$, $x_0 = -i$.

X. 35. Se dau polinoamele:

$$P(x) = x^5 + 5x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 5x + 3 \text{ și } Q(x) = x^4 + 5x^3 + 7x^2 + x - 2.$$

Să se determine c.m.m.d.c. (P, Q) și c.m.m.m.c. $[P, Q]$.

X. 36. Se dau polinoamele:

$$P(x) = 4x^4 + 4x^3 - 25x^2 - x + 6 \text{ și } Q(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6.$$

a) Să se afle c.m.m.d.c. (P, Q) și c.m.m.m.c. $[P, Q]$ și să se deducă rădăcinile comune ale ecuațiilor $P(x) = 0$ și $Q(x) = 0$.

b) Să se simplifice fracția $\frac{P(x)}{Q(x)}$ și să se calculeze $\frac{1}{P(x)} - \frac{1}{Q(x)}$.
Să se simplifice fracțiile:

$$X. 37. F(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 3x + 9}{x^3 - 3x^2 - 8x + 24}, \quad x \in R \setminus \{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\}.$$

$$X. 38. F(x) = \frac{x^5 - 2x^4 + x^3 + 7x^2 - 12x + 10}{3x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 2x - 2}, \quad x \in R \setminus \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

$$\text{X. 39. } F(x) = \frac{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4} + x^3 - 3x - 2}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4} + x^3 - 3x + 2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}.$$

$$\text{X. 40. } F = \frac{x^2 + 2x + 2x \cdot \sqrt{y} + y + 2\sqrt{y}}{x^2 - x + x \cdot \sqrt{y} - \sqrt{y}}, \quad x + \sqrt{y} \neq 0, \quad x \neq 1.$$

$$\text{X. 41. } F = \frac{x^2 + y + 1 - 2x\sqrt{y} + 2x - 2\sqrt{y}}{x^2 - y - 1 + 2\sqrt{y}}, \quad x - \sqrt{y} \neq -1, \quad x + \sqrt{y} \neq 1.$$

$$\text{X. 42. } F(x) = \frac{(x^2 - 4)(x + 1)(x - 3) - 5}{(x^2 - 9)(x + 2)(x - 4) + 5}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1 - \sqrt{29}}{2}, \frac{1 + \sqrt{29}}{2} \right\}.$$

$$\text{X. 43. } F(x, y) = \frac{4x^2 + 8x - 4xy - 4y + y^2 + 4}{4x^2 + 4x + 2y - y^2}, \quad 2x - y \neq -2, \quad 2x + y \neq 0.$$

$$\text{X. 44. } F(x, y) = \frac{4x^2 - 4x + 4xy - 2y + y^2 + 1}{4x^2 - 1 + 2y - y^2}, \quad 2x + y \neq 1; \quad 2x - y \neq 1.$$

$$\text{X. 45. } F(x, y, z) = \frac{(x^2 + y^2 - z^2)^2 - (x^2 - y^2 + z^2)^2}{4xy^2 + 4xyz}, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0, \quad y + z \neq 0.$$

X. 46. Se dă fracția

$$F(x) = \frac{2x^4 - 4x^3 - 4x^2 + ax + b}{x^4 + 3x^3 - x^2 + cx + d}, \quad a, b, c, d, x \in \mathbb{R}.$$

Să se determine a, b, c, d și valorile lui x astfel ca fracția să se simplifice cu $x^2 - x - 2$ și să se efectueze simplificarea.

X. 47. Se consideră fracția

$$F(x, y) = \frac{x^3 - x^2 + 4x^2y - 4xy + 4xy^2 - 4y^2}{x^3 - 2x^2 + 2x^2y - 4xy + x + 2y}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R},$$

$$x \neq 1, \quad x + 2y \neq 0.$$

a) Să se simplifice fracția.

b) Să se calculeze valoarea ei pentru

$$x = \sqrt{a} + \sqrt{b} + 1, \quad y = \frac{1}{2} \left(\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - 1 \right).$$

X. 48. Se dă fracția

$$F(x, y, z) = \frac{(mx + y + 2)^2 + (x + my + z)^2 + (x + y + mz)^2}{(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2}.$$

Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel ca fracția să fie independentă de x, y, z .

X. 49. Se dă fracția:

$$F(n) = \frac{3n^4 + 6n^3 - 2n^2 - 3n + 3}{n^2 + 3n + 2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Să se arate că fracția $F(n)$ nu devine număr întreg pentru nici o valoare a lui n .

b) Dând lui n valorile $1, 2, 3, \dots, k$ se obțin k fracții. Să se arate că suma părților întregi ale acestor fracții este cubul unui număr.

Folosind schema lui Horner să se descompună în elemente simple:

$$\text{X. 50. } \frac{x^4 - 2x^2 + 3}{(x + 1)^5};$$

$$\text{X. 51. } \frac{2x^5 - 5x^3 + 8x}{(x + 1)^6}.$$

Să se descompună în elemente simple următoarele fracții:

$$\text{X. 52. } \frac{1}{x^3(1 - x^2)(1 + x)}.$$

$$\text{X. 53. } \frac{x + 1}{x^2 - 5x + 6}.$$

$$\text{X. 54. } \frac{1}{(x + 1)(x^2 + 1)^2}.$$

$$\text{X. 55. } \frac{x^2 + 15x + 14}{(x^2 + 4)(2x + 3)(3x + 2)}.$$

$$\text{X. 56. } \frac{x^4 + 1}{x^4 + x^2 + 1}.$$

$$\text{X. 57. } \frac{x - 2}{x^6 + 1}.$$

$$\text{X. 58. } \frac{1}{x^5 + x + 1}.$$

$$\text{X. 59. } \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}.$$

$$\text{X. 60. } \frac{x^2 + 1}{x(x^2 - 1)}.$$

$$\text{X. 61. } \frac{x^4 + 1}{x^3(x^2 + 1)}.$$

$$\text{X. 62. } \frac{8}{x^4 + 4}.$$

$$\text{X. 63. } \frac{x^4 + 1}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}.$$

X. 64. Se dă fracția:

$$F(x) = \frac{(x^2 + 3x + 3)^2 - 1}{(x^2 + 5x + 5)^2 - 1}.$$

a) Să se determine domeniul de definiție, știind că x este real.

b) Să se simplifice fracția.

c) Să se descompună în elemente simple fracția obținută în urma simplificării.

Capitolul XI

ECUAȚII DE GRAD SUPERIOR LUI 2

PROBLEME REZOLVATE

XI. 1. Se dă ecuația $x^3 + x^2 + 11x + 5 = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 . Să se determine coeficienții a, b, c astfel ca ecuația $y^3 + ay^2 + by + c = 0$ să aibă rădăcinile $y_1 = x_1 + x_2, y_2 = x_2 + x_3, y_3 = x_3 + x_1$.

Rezolvare. Se scriu formulele lui Viète pentru cele două ecuații. Se obțin sistemele:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 11, \\ x_1x_2x_3 = -5. \end{cases} \quad (1); \quad \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = -a, \\ y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = b, \\ y_1y_2y_3 = -c. \end{cases} \quad (2)$$

Ținând seama de enunțul problemei, din prima ecuație a sistemului (1) se deduce $y_1 = -1 - x_3, y_2 = -1 - x_1, y_3 = -1 - x_2$ și atunci din sistemul (2) rezultă

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &= -2 \Rightarrow a = 2; \quad y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = 3 + 2(x_1 + x_2 + x_3) + \\ &+ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 12 \Rightarrow b = 12 \text{ și } y_1y_2y_3 = -1 - (x_1 + x_2 + x_3) - \\ &- (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - x_1x_2x_3 = -6 \Rightarrow c = 6. \end{aligned}$$

Deci ecuația în y este $y^3 + 2y^2 + 12y + 6 = 0$.

Observație. Din enunț deducem $y = -1 - x$, adică $x = -1 - y$ și ecuația în x dă: $y^3 + 2y^2 + 12y + 6 = 0$ care trebuie să admită aceleași rădăcini cu ecuația dată în y . Rezultă $a = 2, b = 12, c = 6$.

XI. 2. Se consideră ecuația

$$x^3 + ax^2 + ax + a = 0 \text{ cu rădăcinile } x_1, x_2, x_3. \quad (1)$$

Să se formeze ecuația ce admite ca rădăcini:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ y_2 &= x_1^2(x_2 + x_3) + x_2^2(x_1 + x_3) + x_3^2(x_1 + x_2) + 3x_1x_2x_3, \\ y_3 &= x_1^2x_2(x_2 + x_3) + x_2^2x_3(x_1 + x_3) + x_3^2x_1(x_1 + x_2). \end{aligned} \quad (2)$$

Rezolvare.

$$\begin{aligned} y_1 &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3), \\ y_2 &= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3), \\ y_3 &= (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 - x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3). \end{aligned}$$

și ținând seama de relațiile dintre rădăcinile și coeficienții ecuației (1) se obține: $y_1 = a^2 - 2a, y_2 = -a^2, y_3 = 0$.

Deci, ecuația care admite ca rădăcini relațiile (2) este:

$$(y - a^2 + 2a)(y + a^2)(y + 0) = 0 \text{ sau } y^3 + 2ay^2 - a^3(a - 2)y = 0.$$

XI. 3. Se dă ecuația $x^3 + x^2 + 2x + a = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 . Să se găsească valorile lui a pentru care

$$x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 \geq x_1^5 + x_2^5 + x_3^5. \quad (1)$$

Rezolvare. Folosind formulele lui Viète se poate scrie:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = -3.$$

Pentru a calcula pe $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ se înlocuiește succesiv în ecuația dată pe x prin x_1, x_2, x_3 ; se obțin relațiile:

$$\begin{cases} x_1^3 + x_1^2 + 2x_1 + a = 0, \\ x_2^3 + x_2^2 + 2x_2 + a = 0, \\ x_3^3 + x_3^2 + 2x_3 + a = 0. \end{cases} \quad (2) \Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 5 - 3a,$$

Înmulțind relațiile (2) respectiv cu x_1, x_2, x_3 se obține

$$\begin{cases} x_1^4 + x_1^3 + 2x_1^2 + ax_1 = 0, \\ x_2^4 + x_2^3 + 2x_2^2 + ax_2 = 0, \\ x_3^4 + x_3^3 + 2x_3^2 + ax_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 1 + 4a,$$

În mod analog se găsește: $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = -11 + 5a$ și $x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 = 3a^2 - 18a + 9$.

Inegalitatea (1) devine $3a^2 - 18a + 9 \geq -11 + 5a \Rightarrow a \in (-\infty, 1] \cup \left[\frac{20}{3}, +\infty\right)$.

XI. 4. Se consideră ecuația $2x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 .

a) Să se găsească și să se rezolve ecuația care are ca rădăcini pe:

$$y_1 = \frac{x_2 + x_3}{x_1}, \quad y_2 = \frac{x_3 + x_1}{x_2}, \quad y_3 = \frac{x_1 + x_2}{x_3}$$

b) Să se deducă rădăcinile ecuației date.

Rezolvare. Metoda 1. a) Folosind $x_1 + x_2 + x_3 = -1$, se obține

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 - x_1}{x_1} = \frac{-1 - x_1}{x_1}, \quad y_2 = \frac{-1 - x_2}{x_2}, \quad y_3 = \frac{-1 - x_3}{x_3},$$

adică $y = \frac{-1 - x}{x} \Rightarrow x = \frac{-1}{y + 1}$. Înlocuind în ecuația dată pe x prin $\frac{-1}{y + 1}$ se obține ecuația în y

$$2\left(\frac{-1}{y+1}\right)^3 + 2\left(\frac{-1}{y+1}\right)^2 - 3\left(\frac{-1}{y+1}\right) - 1 = 0 \Rightarrow y^3 - 5y - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y+2)(y^2 - 2y - 1) = 0 \Rightarrow y_1 = -2, \quad y_2 = 1 - \sqrt{2}, \quad y_3 = 1 + \sqrt{2}.$$

b) Înlocuind valorile lui y în relația care definește pe x ca funcție de y , se obțin rădăcinile ecuației date:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{2}}{2}, \quad x_3 = \frac{-2 + \sqrt{2}}{2}.$$

Metoda 2. b) Se observă că ecuația în x admite rădăcina $x_1 = 1$ și ecuația se scrie sub forma:

$$(x-1)(2x^2 + 4x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{2}}{2}, \quad x_3 = \frac{-2 + \sqrt{2}}{2}.$$

a) Înlocuind valorile lui x deduse la punctul b) în relațiile care definesc pe y , se obține

$$y_1 = -2, \quad y_2 = 1 - \sqrt{2}, \quad y_3 = 1 + \sqrt{2}.$$

Ecuația în y care admite ca rădăcini pe y_1, y_2, y_3 este

$$(y+2)[y - (1 - \sqrt{2})][y - (1 + \sqrt{2})] = 0 \Rightarrow y^3 - 5y - 2 = 0.$$

XI. 5. Se dă ecuația $x^3 - 11x^2 + 24x + 144 \sin^2 a = 0$.

Să se rezolve și să se determine valorile lui a din intervalul $(0, 2\pi)$ știind că $x_1 + x_2 = 5$.

Rezolvare. Se scrie relația dată împreună cu relațiile dintre rădăcini și coeficienți:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 24, \\ x_1 x_2 x_3 = -144 \sin^2 a, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ x_3 = 6, \\ x_1 x_2 = -6, \\ x_1 x_2 = -24 \sin^2 a, \end{cases} \Rightarrow x_1 = -1,$$

$$x_2 = 6, \quad x_3 = 6, \quad \sin a = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow a = \pm (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k = 0, 1) \text{ cu } a \in (0, 2\pi) \Rightarrow a = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}.$$

XI. 6. Pentru ce valori ale parametrilor reali m, n ecuația $2mx^3 - x^2 + (1 + 2\sqrt{2})mx + 2(m - n^2) = 0$ are ca rădăcini sinusurile unghiurilor unui triunghi dreptunghic?

Rezolvare. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației date și α unul din unghiurile ascuțite ale triunghiului dreptunghic. Se obține

$$x_1 = \sin 90^\circ = 1, \quad x_2 = \sin \alpha, \quad x_3 = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha.$$

Folosind formulele lui Viète se obține:

$$\begin{cases} 1 + \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2m}, \\ \sin \alpha + \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}, \\ \sin \alpha \cos \alpha = \frac{n^2}{m} - 1. \end{cases}$$

Notînd $\sin \alpha + \cos \alpha = u$, $\sin \alpha \cos \alpha = v$; ecuația a doua împreună cu $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ dau sistemul

$$\begin{cases} u + v = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2} \\ u^2 - 2v = 1 \end{cases} \Rightarrow u^2 + 2u - 2(1 + \sqrt{2}) = 0$$

$$u_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = -1 \pm (1 + \sqrt{2}).$$

Deoarece $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ rezultă $u > 0$ și deci $u = \sqrt{2}$ și atunci $v = \frac{1}{2}$. Prin urmare $\sin \alpha$

și $\cos \alpha$ sînt rădăcinile ecuației $2t^2 - 2\sqrt{2} \cdot t + 1 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, adică $\sin \alpha =$

$$= \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ (triunghi dreptunghic isoscel), astfel c\^a } m = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \text{ \^si } n = \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3(\sqrt{2}-1)}.$$

XI. 7. Se d\^a ecua\^ia

$$x^4 - 2x^3 - 25x^2 + mx + 120 = 0, m \in R. \quad (1)$$

S\^a se determine valorile lui m astfel \^nc\^it \^ntre r\^ad\^acinile ecua\^iei (1) s\^a existe rela\^ia

$$4(x_1 + x_2) + 3(x_3 + x_4) = 0. \quad (2)$$

Pentru aceste valori ale lui m s\^a se rezolve ecua\^ia dat\^a.

Rezolvare. Se noteaz\^a

$$x_1 + x_2 = A, \quad x_1 x_2 = B, \quad x_3 + x_4 = C, \quad x_3 x_4 = D. \quad (3)$$

Reac\^ia (2) \^mpreun\^a cu formulele lui Vi\^ete se scriu:

$$\begin{cases} 4A + 3C = 0, \\ A + C = 2, \\ B + AC + D = -25, \\ BC + AD = -m, \\ BD = 120, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -6, \\ C = 8, \\ AC = -48, \\ B + D = 23, \\ 8B - 6D = -m, \\ BD = 120. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -6, \\ C = 8, \\ B = 8, \\ D = 15, \\ m = 26, \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} A = -6, \\ C = 8, \\ B = 15, \\ D = 8, \\ m = -72. \end{cases}$$

Pentru $m = 26$, ecua\^ia (1) se scrie

$$x^4 - 2x^3 - 25x^2 + 26x + 120 = 0. \quad (1')$$

R\^ad\^acinile acestei ecua\^ii le ob\^tinem u\^sor din rela\^iile (3):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -6, \\ x_1 x_2 = 8, \end{cases} \Rightarrow x_1 = -4, \quad x_2 = -2 \text{ sau } x_1 = -2, \quad x_2 = -4 \text{ \^si } \begin{cases} x_3 + x_4 = 8, \\ x_3 x_4 = 15, \end{cases} \Rightarrow x_3 = 3, \quad x_4 = 5 \text{ sau } x_3 = 5, \quad x_4 = 3.$$

Pentru $m = -72$ ecua\^ia (1) devine

$$x^4 - 2x^3 - 25x^2 - 72x + 120 = 0. \quad (1'')$$

R\^ad\^acinile ecua\^iei (1'') se ob\^tin analog din rela\^iile (3):

$$x_{1,2} = -3 \pm i\sqrt{6}, \quad x_{3,4} = 4 \pm 2i\sqrt{2}.$$

Observa\^ie. Din cele de mai sus rezult\^a c\^a ecua\^iile (1') \^si (1'') se pot scrie sub urm\^atoarele forme echivalente:

$$(x^2 + 6x + 8)(x^2 - 8x + 15) = 0; \quad (x^2 + 6x + 15)(x^2 - 8x + 8) = 0.$$

XI. 8. S\^a se g\^aseasc\^a toate r\^ad\^acinile ra\^ionale ale ecua\^iei

$$12x^5 + 32x^4 + 21x^3 + 34x^2 + 39x - 18 = 0.$$

Rezolvare. Se folose\^ste *teorema*: „Dac\^a o ecua\^ie cu coeficien\^ti \^ntregi admite r\^ad\^acini ra\^ionale $r_i = \frac{\alpha_i}{\beta_i}$ cu α_i \^si β_i numere \^ntregi ($i = 1, 2, \dots$) atunci α_i s\^int elemente ale mul\^timii divizorilor termenului liber a_0 , iar β_i s\^int elemente ale mul\^timii divizorilor primului coeficient a_n , \^ncerc\^ind dac\^a verific\^a ecua\^ia numai acele elemente α_i \^si β_i pentru care at\^it $\frac{f(1)}{\alpha_i - \beta_i}$ c\^it \^si $\frac{f(-1)}{\alpha_i + \beta_i}$ s\^int numere \^ntregi”

Potrivit teoremei enun\^ate, se consider\^a mul\^timile

$$A = \{\alpha_i \mid a_0 : \alpha_i\} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18, -1, -2, -3, -6, -9, -18\},$$

$$B = \{\beta_i \mid a_n : \beta_i\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12, -1, -2, -3, -4, -6, -12\}.$$

Din mul\^timile A \^si B se iau acele elemente care satisfac simultan condi\^iile $f(1) : (\alpha_i - \beta_i)$, $f(-1) : (\alpha_i + \beta_i)$ unde $f(1) = 120$ \^si $f(-1) = 24$, atunci eventualele r\^ad\^acini ra\^ionale de forma $\frac{\alpha_i}{\beta_i}$ s\^int:

$$\pm \frac{1}{2}, \quad \pm \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \quad -\frac{2}{3}, \quad -\frac{3}{2}, \quad \pm \frac{2}{1}, \quad \pm \frac{3}{1}, \quad -\frac{9}{1}.$$

Deoarece coeficien\^tii ecua\^iei prezint\^a o singur\^a varia\^ie de semn, pentru aflarea m\^arginei superioare a r\^ad\^acinilor pozitive se folose\^ste urm\^atoarea proprietate: dac\^a coeficien\^tii ecua\^iei de gradul n ; $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ au o varia\^ie de semn, de exemplu $a_k > 0$, $a_i < 0$ ($k = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$) atunci m\^arginea superioar\^a a r\^ad\^acinilor sale pozitive este egal\^a cu num\^arul cel mai mic pentru care grupul de termeni $a_{i+j} x^{i+j} + a_i x^i + \dots + a_1 x + a_0 > 0$ ($j = 1$ dac\^a $a_{i+1} \neq 0$, $j > 1$ dac\^a $a_{i+1} = 0$, $a_{i+2} = 0, \dots, a_{i+j-1} = 0$, $a_{i+j} \neq 0$). \^n cazul ecua\^iei date exist\^a o singur\^a varia\^ie de semn \^si $39x - 18 > 0$ pentru $x \geq \frac{1}{2}$, de unde rezult\^a c\^a $L = \frac{1}{2}$

este m\^arginea superioar\^a a r\^ad\^acinilor pozitive. Deci r\^am\^in de \^ncercat numai numerele:

$$-\frac{1}{2}, \quad \pm \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \quad -\frac{2}{3}, \quad -\frac{3}{2}, \quad -2, -3, -9.$$

Pentru aceasta se întocmește schema lui Horner:

x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	R		Concluzii
12	32	21	34	39	-18			
	12	26	8	30	24	-30	$-\frac{1}{2}$	nu este rădăcină
	12	36	33	45	54	0	$\frac{1}{3}$	rădăcină
		12	32	$-\frac{32}{3} + 33 \neq \text{nr. întreg}$ (nu se mai continuă calculele)			$-\frac{1}{3}$	nu este rădăcină
		12	33	$-\frac{33}{4} + 33 \neq \text{nr. întreg}$			$-\frac{1}{4}$	nu este rădăcină
		12	28	$-\frac{56}{3} + 33 \neq \text{nr. întreg}$			$-\frac{2}{3}$	nu este rădăcină
		12	18	6	36	0	$-\frac{3}{2}$	rădăcină
			12	-6	18	0	-2	rădăcină
				12	-42	144	-3	nu este rădăcină
				12	-114	1044	-9	nu este rădăcină

Din tabel rezultă că rădăcinile raționale ale ecuației date sînt: $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -\frac{3}{2}$, $x_3 = -2$ și ecuația se scrie

$$\left(x - \frac{1}{3}\right) \left(x + \frac{3}{2}\right) (x + 2) [6(2x^2 - x - 3)] = 0$$

cu rădăcinile $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -\frac{3}{2}$, $x_3 = -2$, $x_{4,5} = \frac{1 \pm i\sqrt{23}}{4}$.

XI. 9. Se consideră ecuația

$$x^4 - 7x^3 + 17x^2 + mx + n = 0, \quad m, n \in \mathbb{R}.$$

Să se determine parametrii m și n și să se rezolve ecuația știind că admite o rădăcină dublă și că suma celorlalte două rădăcini simple este 5.

Rezolvare. Metoda 1. Fie $x_1 = x_2$ și $x_3 + x_4 = 5$. Formulele lui Viète, împreună cu relațiile date, se scriu:

$$\begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 5 = 7, \\ 10 + x_1^2 + x_3x_4 = 17, \\ 5x_1^2 + 2x_1x_3x_4 = -m, \\ x_1^2x_3x_4 = n, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = 1, \\ x_3 + x_4 = 5, \\ x_3x_4 = 6, \\ m = -17, \\ n = 6. \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 3,$$

$$m = -17, \quad n = 6.$$

Metoda 2. Din $x_1 = x_2$, $x_3 + x_4 = 5$ și $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ rezultă $x_1 = x_2 = 1$. Notînd $P(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 + mx + n$, atunci 1 este rădăcină dublă a acestui polinom, adică restul împărțirii lui $P(x)$ prin $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$, trebuie să fie identic nul. Făcînd împărțirea se obține: $R(x) = (m + 17)x + n - 6 \equiv 0 \Rightarrow m = -17, n = 6$ și ecuația se scrie sub formă echivalentă

$$(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 5x + 6) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 3.$$

XI. 10. Pentru ce valori ale lui m ecuațiile:

$$x^3 - mx^2 - (9 - 3m)x - 1 = 0,$$

$$(m - 8)x^3 + (30 - 3m)x^2 - 18x + 8 - m = 0,$$

admit aceleași rădăcini.

Rezolvare. Două ecuații de același grad admit aceleași rădăcini dacă coeficienții termenilor de același grad sînt proporționali. Rezultă

$$\frac{1}{m - 8} = \frac{-m}{30 - 3m} = \frac{-(9 - 3m)}{-18} = \frac{-1}{8 - m}.$$

De aici se obține sistemul:

$$\begin{cases} 30 - 3m = -m^2 + 8m, \\ (9 - 3m)(m - 8) = 18, \\ -m + 8 = 8 - m, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 11m + 30 = 0, \\ m^2 - 11m + 30 = 0, \\ m - 8 = m - 8. \end{cases} \Rightarrow m_1 = 5, \quad m_2 = 6,$$

XI. 11. Să se rezolve ecuațiile

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - x + 2 = 0; \quad Q(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0$$

știind că admit rădăcini comune.

Rezolvare. Rădăcinile comune a două ecuații $P(x) = 0$ și $Q(x) = 0$ sînt date de rădăcinile c.m.m.d.c. al polinoamelor $P(x)$ și $Q(x)$. Pentru a afla c.m.m.d.c. se folosește algoritmul lui Euclid: se împarte $P(x)$ la $Q(x)$ și se obține restul $R_1(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4x = 2(x^3 - 3x^2 + 2x) = 2R'_1(x)$; împărțind $Q(x)$ la $R'_1(x)$ se obține restul $R_2(x) = x^2 - 3x + 2$; împărțind $R'_1(x)$ la $R_2(x)$ se obține restul zero. Deci c.m.m.d.c. al polinoamelor

$P(x)$ și $Q(x)$ este $D(x) = R_2(x) = x^2 - 3x + 2$ cu rădăcinile $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ care sînt rădăcini comune pentru ecuațiile date. Pentru a afla celelalte rădăcini se împart $P(x)$ și $Q(x)$ la $D(x)$ și se obțin ecuațiile:

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2},$$

$$x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Deci rădăcinile ecuațiilor date sînt:

$$\text{pentru } P(x) = 0: x_1 = 1, x_2 = 2, x_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{pentru } Q(x) = 0: x_1 = 1, x_2 = 2, x_{3,4} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

XI. 12. Să se determine m și n astfel ca ecuațiile

$$P(x) = x^3 - 7x + m = 0, \quad Q(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x + n = 0$$

să aibă două rădăcini comune.

Rezolvare. Pentru ca ecuațiile să aibă două rădăcini comune, c.m.m.d.c. al polinoamelor care formează ecuațiile trebuie să fie un polinom de gradul 2. Se aplică algoritmul lui Euclid. Împărțind $Q(x)$ la $P(x)$ se obține restul $R_1(x) = 4x^2 - (m - 10)x - 3m + n$, care fiind un polinom de gradul 2, este c.m.m.d.c. al polinoamelor $P(x)$ și $Q(x)$. Împărțind $P(x)$ la $R_1(x) = D(x)$ se obține restul $R_2(x) = (m^2 - 8m - 4n - 12)x + 3m^2 - mn - 14m + 10n$ care trebuie să fie identic nul:

$$R_2(x) \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} m^2 - 8m - 4n - 12 = 0, \\ 3m^2 - mn - 14m + 10n = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = \frac{m^2 - 8m - 12}{4} \\ m^3 - 3m^2 + 124m + 120 = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 = 6, m_{2,3} = 12 \pm 2\sqrt{41} \text{ și } n_1 = -6, n_{2,3} = 50 \pm 8\sqrt{41}.$$

Rădăcinile comune sînt date de $R_1(x) = 0$:

$$- \text{pentru } m = 6, n = -6, R_1(x) = 4x^2 + 4x - 24 = 0, x_1 = -3, x_2 = 2,$$

$$- \text{pentru } m = 12 + 2\sqrt{41}, n = 50 + 8\sqrt{41}, R_1(x) = 4x^2 - 2(1 + \sqrt{41})x + 2(7 + \sqrt{41}) = 0, x_{1,2} = \frac{1 + \sqrt{41} \pm i\sqrt{14 + 6\sqrt{41}}}{4};$$

$$- \text{pentru } m = 12 - 2\sqrt{41}, n = 50 - 8\sqrt{41}, R_1(x) = 4x^2 - 2(1 - \sqrt{41})x + 2(7 - \sqrt{41}) = 0, x_{1,2} = \frac{1 - \sqrt{41} \pm i\sqrt{-14 + 6\sqrt{41}}}{4}.$$

XI. 13. Să se găsească condiția ca ecuațiile

$$P(x) = x^3 + px + q = 0, \quad Q(x) = x^2 + px + q = 0$$

să aibă o rădăcină comună și să se găsească rădăcina comună.

Rezolvare. Dacă ecuațiile $P(x) = 0$ și $Q(x) = 0$ au o rădăcină comună, atunci această rădăcină verifică și ecuația $P(x) - Q(x) = 0$. Scăzînd ecuațiile se obține: $x^3 - x^2 = 0$, de unde $x_{1,2} = 0, x_3 = 1$. Pentru rădăcina comună $x = 0$ trebuie să avem $q = 0$ și ecuațiile se reduc la

$$x^3 + px = 0, \Rightarrow x = 0, x_{2,3} = \pm \sqrt{-p},$$

$$x^2 + px = 0, \Rightarrow x = 0, x_2 = -p.$$

Dacă $x = 1$ este rădăcină comună, atunci din $P(1) = 0, Q(1) = 0$ rezultă $p + q + 1 = 0$ iar ecuațiile se reduc la

$$(x - 1)(x^2 + x - q) = 0, \Rightarrow x_1 = 1, x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4q}}{2},$$

$$(x - 1)(x - q) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = q.$$

XI. 14. Să se rezolve ecuațiile

$$x^5 - (1 - 3m) \cdot x - 3m = 0, \quad (1)$$

$$x^3 + x + m = 0. \quad (2)$$

știind că admit o rădăcină comună.

Rezolvare. Se înmulțește ecuația (2) cu x^2 și se scade din (1),

$$x^3 + mx^2 + (1 - 3m)x + 3m = 0.$$

Se scade din această ecuație pe (2) și se obține ecuația

$$m(x^2 - 3x + 2) = 0 \quad (3)$$

cu rădăcinile $x_1 = 1, x_2 = 2, m = 0$, dintre care cel puțin una este rădăcină comună a ecuațiilor (1) și (2). Pentru $x = 1$ rădăcina comună ecuației (1) dă $0 = 0$, iar ecuația (2) dă $m = -2$. Pentru $m = -2$ ecuația (1) se scrie

$$(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x - 6) = 0 \quad (1')$$

cu rădăcina $x_1 = 1$ și ecuația de gradul 4: $x^4 + x^3 + x^2 + x - 6 = 0$ care are două rădăcini reale, de semne contrare $-1,8 < x_2 < -1,7, 1,1 < x_3 < 1,2$ și două rădăcini complexe conjugate; ecuația (2), pentru $m = -2$, se scrie

$$(x - 1)(x^2 + x + 2) = 0 \text{ cu rădăcinile } x_1 = 1, x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}. \quad (2')$$

Pentru $x = 2$ rădăcină comună, din (1) și (2) rezultă $m = -10$ și ecuațiile

$$(x - 1)(x - 2)(x^3 - x^2 + 3x - 5) = 0 \quad (1'')$$

cu rădăcinile $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ și ecuația de gradul 3: $x^3 - x^2 + 3x - 5 = 0$, care are o rădăcină reală $1,4 < x_3 < 1,5$ și două rădăcini complexe conjugate

$$(x-2)(x^2-2x+5)=0 \quad (2'')$$

cu rădăcinile $x_1 = 2$, $x_{2,3} = 1 \pm 2i$.

Pentru $m = 0$ ecuațiile (1) și (2) se scriu

$$x(x^4 - 1) = 0 \quad (1''')$$

cu rădăcinile $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_{4,5} = \pm i$,

$$x(x^2 + 1) = 0 \quad (2''')$$

cu rădăcinile $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm i$ (ecuațiile au trei rădăcini comune).

XI. 15. Să se determine m astfel încât ecuațiile:

$$x^3 + x^2 - 2x + m - 2 = 0, \quad (1)$$

$$x^3 - x^2 + 3x - 2m + 1 = 0, \quad (2)$$

$$x^3 + 2x^2 + x - 2m = 0. \quad (3)$$

să admită o rădăcină comună și apoi să se rezolve.

Rezolvare. Considerind cele trei ecuații ca formînd un sistem linear în x, x^2, x^3 , s obține

$$\begin{cases} -2x + x^2 + x^3 = 2 - m, \\ 3x - x^2 + x^3 = 2m - 1, \\ x + 2x^2 + x^3 = 2m. \end{cases}$$

Determinantul sistemului este:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 11 \neq 0 \text{ (sistem compatibil determinat)}$$

Se obține: $\Delta_x = 9m - 7$, $\Delta_{x^2} = 6m - 1$, $\Delta_{x^3} = m + 9$ și $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $x^2 = \frac{\Delta_{x^2}}{\Delta}$, $x^3 = \frac{\Delta_{x^3}}{\Delta}$; din $(\Delta_{x^3})^2 = \Delta_{x^2} \cdot \Delta_x$ adică $(6m - 1)^2 = (m + 9)(9m - 7) \Rightarrow 27m^2 - 86m + 64 = 0 \Rightarrow m_1 = 2$, $m_2 = \frac{32}{27}$.

Pentru $m = 2$, $\Delta_x = 11$, $\Delta_{x^2} = 11$, $\Delta_{x^3} = 11$ și ecuațiile admit rădăcina comună $x_1 = 1$. Celelalte rădăcini ale primei ecuații sînt $x_2 = 0$, $x_3 = -2$, pentru ecuația a doua $x_2 = 3$, $x_3 = -3$, și pentru a treia $x_2 = \frac{-3 + 7i}{2}$, $x_3 = \frac{-3 - 7i}{2}$.

Pentru $m = \frac{32}{27}$, $\Delta_x = \frac{11}{3}$, $\Delta_{x^2} = \frac{55}{9}$, $\Delta_{x^3} = \frac{275}{27}$ și $x = \frac{1}{3}$, $x^2 = \frac{5}{9}$, $x^3 = \frac{25}{27}$, ceea ce este imposibil și prin urmare ecuațiile nu admit nici o rădăcină comună.

XI. 16. Se consideră ecuația $f(x) = 2x^4 - 11x^3 + 18x^2 + ax + b = 0$. Să se determine a și b astfel ca ecuația $f(x) = 0$ să aibă o rădăcină întreagă triplă și să se rezolve apoi ecuația.

Rezolvare. Metoda 1. Dacă ecuația $f(x) = 0$ admite o rădăcină triplă $x = \alpha$, atunci $f'(x) = 0$ admite rădăcina dublă $x = \alpha$, iar $f''(x) = 0$, admite rădăcina simplă $x = \alpha$. Se obține $f''(x) = 24x^2 - 66x + 36 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$, $x_2 = \frac{3}{4}$. Rădăcina triplă fiind întreagă înseamnă că $f(x) = 0$, $f'(2) = 0$, de unde se obține sistemul

$$\begin{cases} 2a + b = -16 \\ a = -4 \end{cases} \Rightarrow a = -4, b = -8$$

$$f(x) = 2x^4 - 11x^3 + 18x^2 - 4x - 8 = 0 \Rightarrow (x-2)^3(2x+1) = 0,$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = 2, \quad x_4 = -\frac{1}{2}.$$

Metoda 2. Fie $x_1 = x_2 = x_3 = \alpha$ și $x_4 = \beta$. Relațiile lui Viète ne conduc la sistemul

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = \frac{11}{2}, \\ 3\alpha^2 + 3\alpha\beta = 9, \\ \alpha^3 + 3\alpha^2\beta = -\frac{a}{2}, \\ \alpha^3\beta = \frac{b}{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{11-6\alpha}{2}, \\ 4\alpha^2 - 11\alpha + 6 = 0, \\ 4\alpha^3 - 18\alpha - a = 0, \\ 2\alpha^4 - 6\alpha^2 + b = 0. \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = 2, \quad \beta = -\frac{1}{2},$$

$$a_1 = -4, b_1 = -8 \text{ sau } \alpha_2 = \frac{3}{4}, \beta_2 = \frac{13}{14}, a_2 = -\frac{189}{16}, b_2 = \frac{531}{128}.$$

Rădăcina triplă fiind întreagă rezultă $x_1 = x_2 = x_3 = \alpha_1 = 2$, $x_4 = \beta = -\frac{1}{2}$, $a_1 = -4$, $b_1 = -8$.

XI. 17. Să se rezolve ecuația

$$f(x) \equiv x^6 + 2x^5 - 8x^4 - 14x^3 + 11x^2 + 28x + 12 = 0$$

știind că admite rădăcini multiple.

Rezolvare. Dacă ecuația $f(x) = 0$ admite rădăcini multiple, atunci ecuațiile $f(x) = 0$ și $f'(x) = 0$ au cel puțin o rădăcină comună care se obține rezolvînd ecuația $D(x) = 0$,

unde $D(x)$ este c.m.m.d.c. al polinoamelor $f(x)$ și $f'(x)$. Ecuația derivată este $f'(x) = 3x^3 + 5x^4 - 16x^3 - 21x^2 + 11x + 14 = 0$. Pentru determinarea c.m.m.d.c. al polinoamelor $f(x)$ și $f'(x)$ se aplică algoritmul lui Euclid al împărțirilor succesive. Se obține $(f, f') = x^3 - 3x - 2 = D(x)$. Ecuația $D(x) = x^3 - 3x - 2 = 0$, admite rădăcinile $x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = 2$, care sînt rădăcinile comune pentru ecuațiile $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$. Deoarece -1 este rădăcină dublă, iar 2 este rădăcină simplă pentru ecuația $f'(x) = 0$, urmează că -1 este rădăcină triplă, iar 2 este rădăcină dublă pentru ecuația $f(x) = 0$. Folosind schema lui Horner la împărțirea lui $f(x)$ prin $(x+1)^3 \cdot (x-2)^2$ se obține citul $x+3$. Rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ sînt $x_1 = x_2 = x_3 = -1$, $x_4 = x_5 = 2$, $x_6 = -3$.

XI. 18. Se da ecuația

$$f(x) \equiv 3x^4 - 16x^3 + 6x^2 + 72x - 84 = 0.$$

Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuației și intervalele în care sînt cuprinse acestea.

Rezolvare. Se știe că numărul rădăcinilor reale simple ale unui polinom $f \in R[x]$ este egal cu numărul variațiilor de semn ale șirului Rolle atașat lui f . În cazul nostru șirul lui Rolle este $f(-M)$, $f(x'_1)$, $f(x'_2)$, $f(x'_3)$, $f(M)$ unde x'_1 , x'_2 , x'_3 sînt rădăcinile polinomului derivat $f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 12x + 72$ și $M = 1 + \frac{M_{f'}}{|b_3|}$ unde $M_{f'} = \max\{|b_0|, |b_1|, |b_2|, |b_3|\}$ cu $b_k (k = 0, 1, 2, 3)$ coeficienții lui f' . Dar $M_{f'} = 72$ și $|b_3| = 12$; rezultă $M = 7$, ceea ce ne spune că rădăcinile reale ale polinomului f' aparțin intervalului $(-7, 7)$. Acestea se obțin rezolvînd ecuația $f'(x) = 12(x^3 - 4x^2 + x + 6) = 0 \Rightarrow x'_1 = -1$, $x'_2 = 2$, $x'_3 = 3$ și $-M = -7 < -1 < 2 < 3 < 7 = M$. Șirul lui Rolle atașat polinomului f este $f(-7)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(7)$. Termenii șirului avînd respectiv semnele $+$, $-$, $+$, $-$, $+$ rezultă că ecuația dată are patru rădăcini reale x_1 , x_2 , x_3 , x_4 aflate respectiv în intervalele: $-7 < x_1 < -1$, $-1 < x_2 < 2$, $2 < x_3 < 3$, $3 < x_4 < 7$.

XI. 19. Se da ecuația $f(x) \equiv 2x^3 + x^2 - 4x + m = 0$, $m \in R$. Să se determine parametrul real m astfel ca ecuația să aibă toate rădăcinile reale.

Rezolvare. $f'(x) \equiv 2(3x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = -1$, $x_2 = \frac{2}{3}$. Se formează șirul lui Rolle:

$$\begin{array}{ccccccc} f(-\infty) & f(-1) & f\left(\frac{2}{3}\right) & f(+\infty) \\ -\infty & m+3 & m-\frac{44}{37} & +\infty \end{array}$$

Ecuația admite toate rădăcinile reale dacă m satisface sistemul

$$\begin{cases} m+3 \geq 0 \\ m-\frac{44}{37} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow m \in \left[-3, \frac{44}{37}\right].$$

Pentru $m = -3 \Rightarrow x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = \frac{3}{2}$.

$$\text{Pentru } m = \frac{44}{37} \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{2}{3}, \quad x_3 = -\frac{11}{6}.$$

Pentru $m \in \left(-3, \frac{44}{37}\right)$ ecuația admite toate rădăcinile reale diferite.

XI. 20. Să se discute după valorile parametrului real m rădăcinile reale ale ecuației $f(x) = 3x^2 - 2x - 4 \cdot \ln x + m = 0$.

Rezolvare. Funcția $f(x) = 3x^2 - 2x - 4 \cdot \ln x + m$ este definită și derivabilă pentru $x \in (0, +\infty)$; $f'(x) = 6x - 2 - \frac{4}{x} = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ și $x_2 = -\frac{2}{3} \notin (0, +\infty)$. Pentru formarea șirului lui Rolle se calculează limita funcției $f(x)$ pentru $x \rightarrow 0 (x > 0)$ și $x \rightarrow +\infty$; se obține $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(3 - \frac{2}{x} - \frac{4 \ln x}{x^2} \right) \right] = +\infty$. Deci șirul lui Rolle este

$$\begin{array}{ccc} f(0) & f(1) & f(+\infty) \\ +\infty & 1+m & +\infty \end{array}$$

Dacă $m > -1$, ecuația nu are nici o rădăcină reală.

Dacă $m < -1$, ecuația are două rădăcini reale.

Dacă $m = -1$, ecuația admite rădăcina dublă $x_1 = x_2 = 1$.

XI. 21. Să se discute după valorile parametrului real m natura rădăcinilor ecuației $f(x) \equiv x^4 - 4x^3 - 8x^2 + m = 0$.

Rezolvare. $f'(x) \equiv 4x(x^2 - 3x - 4) = 0 \Rightarrow x'_1 = -1$, $x'_2 = 0$, $x'_3 = 4$. Șirul lui Rolle atașat polinomului $f(x)$ este

$$\begin{array}{ccccccc} f(-\infty) & f(-1) & f(0) & f(4) & f(+\infty) \\ +\infty & m-3 & m & m-128 & +\infty \end{array}$$

Numărul rădăcinilor reale va depinde de semnul expresiilor în m , care se anulează pentru $m = 3$, $m = 0$ și $m = 128$. Discuția rădăcinilor poate fi rezumată în următorul tabel:

x	$-\infty$	-1	0	4	$+\infty$	
$f(x)$	$+\infty$	$m-3$	m	$m-128$	$+\infty$	Natura rădăcinilor
m						
$m \in (-\infty, 0)$	+	-	-	-	+	2 răd. reale, 2 două răd. complexe $x_1 < -1$, $x_2 > 4$.
$m = 0$	+	-	0	-	+	4 răd. reale, $x = 0$ răd. dublă
$m \in (0, 3)$	+	-	+	-	+	4 răd. reale
$m = 3$	+	0	+	-	+	4 răd. reale $x = -1$, răd. dublă
$m \in (3, 128)$	+	+	+	-	+	2 răd. reale, 2 răd. complexe
$m = 128$	+	+	+	0	+	$x = 4$, răd. dublă, 2 răd. complexe
$m \in (128, +\infty)$	+	+	+	+	+	4. răd. complexe

XI. 22. Să se discute natura rădăcinilor ecuației

$$f(x) \equiv x^4 + px^2 + q = 0, \quad p \neq 0, \quad p, q \in \mathbb{R}.$$

Rezolvare. Ecuația derivată $4x^3 + 2px = 0$ are rădăcinile

$$x'_1 = -\sqrt{-\frac{p}{2}}, \quad x'_2 = 0, \quad x'_3 = \sqrt{-\frac{p}{2}}.$$

Șirul lui Rolle atașat polinomului $f(x)$ este

$$\begin{array}{ccccccc} f(-\infty) & f\left(-\sqrt{-\frac{p}{2}}\right) & f(0) & f\left(\sqrt{-\frac{p}{2}}\right) & f(+\infty) \\ +\infty & q - \frac{p^2}{4} & q & q - \frac{p^2}{4} & +\infty \end{array}$$

Se întocmește tabelul discuției rădăcinilor:

x		$-\infty$	$-\sqrt{-\frac{p}{2}}$	0	$\sqrt{-\frac{p}{2}}$	$+\infty$	Natura rădăcinilor
$f(x)$		$+\infty$	$q + \frac{3p^2}{4}$	q	$q + \frac{3p^2}{4}$	$+\infty$	
$p > 0$	$q \in \left(-\infty, -\frac{3p^2}{4}\right)$	+	-	-	-	+	2 răd. reale, 2 răd. complexe
	$q = -\frac{3p^2}{4}$	+	0	-	0	+	$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{p}{2}}, x_{3,4} = \pm i \sqrt{\frac{3p}{2}}$
	$q \in \left(-\frac{3p^2}{4}, 0\right)$	+	+	-	+	+	2 răd. reale, 2 răd. complexe
	$q = 0$	+	+	0	+	+	$x_{1,2} = 0, x_{3,4} = \pm i\sqrt{p}$
	$q \in (0, +\infty)$	+	+	+	+	+	4 răd. complexe

XI. 23. Să se discute, după valorile parametrului real m , natura rădăcinilor ecuației $x^4 - 6x^2 + mx + 24 = 0$.

Rezolvare. Dacă se aplică direct teorema lui Rolle, ecuația derivată prezintă neajunsul că conține pe m și deci, în general, nu poate fi rezolvată prin mijloace elementare.

În locul ecuației date putem considera ecuația care se obține prin împărțirea cu x : $f(x) = x^3 - 6x + \frac{24}{x} + m = 0$ ale cărei rădăcini sînt aceleași cu ale ecuației date. Deoarece $f(x)$ este discontinuă pentru $x = 0$, se discută ecuația în intervalele $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. Rezultă $f'(x) = 3x^2 - 6 - \frac{24}{x^2} = 3 \cdot \frac{x^4 - 2x^2 - 8}{x^2} = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$. Tabelul cu discuția rădăcinilor ecuației este:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	Natura rădăcinilor	
$f(x)$	$-\infty$	$m-8$	$-\infty$	$+\infty$	$m+8$		$+\infty$
p, q							
$m \in (-\infty, -8)$	-	-	-	+	-	+	2 răd. reale pozitive 2 răd. complexe
$m = -8$	-	-	-	+	0	+	$x = 2$ răd. duble, 2 răd. complexe
$m \in (-8, 8)$	-	-	-	+	+	+	4 răd. complexe
$m = 8$	-	0	-	+	+	+	$x = -2$ răd. duble, 2 răd. complexe
$m \in (8, +\infty)$	-	+	-	+	+	+	2 răd. reale, 2 răd. complexe

XI. 24. Folosind metoda grafică, să se discute natura rădăcinilor ecuației $x^4 - (2m + 1)x^2 + 4x + m^2 - 4 = 0$, m fiind un parametru real.

Rezolvare. Se scrie ecuația sub forma

$$m^2 - 2x^2m + x^4 - x^2 - 4x - 4 = 0.$$

Se rezolvă această ecuație în raport cu m ;

$$m_{1,2} = x^2 \pm \sqrt{(x-2)^2} \Rightarrow m_1 = x^2 + |x-2| \text{ și } m_2 = x^2 - |x-2|.$$

Se reprezintă pe același sistem de coordonate curbele $f_1(x) = x^2 + |x-2|$ și $f_2(x) = x^2 - |x-2|$ care sînt două funcții de gradul doi în x : $y_1(x) = x^2 + x - 2$ și $y_2(x) = x^2 - x + 2$; ținînd seama de definiția modulului, rezultă:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & \text{dacă } x - 2 \geq 0 \\ x^2 - x + 2 & \text{dacă } x - 2 < 0 \end{cases}; \quad f_2(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2 & \text{dacă } x - 2 \geq 0 \\ x^2 + x - 2 & \text{dacă } x - 2 < 0 \end{cases}.$$

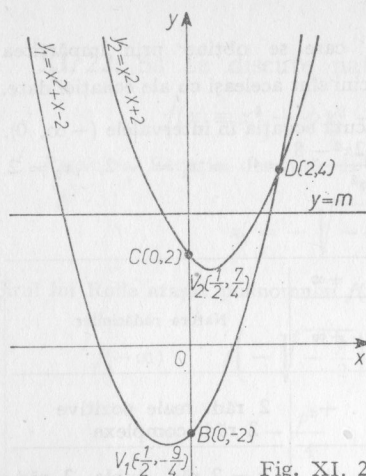


Fig. XI. 24

Pentru $y_1(x)$ se obține $x_{v_1} = -\frac{1}{2}$, $y_{v_1} = -\frac{9}{4}$, $x'_1 = -2$, $x'_2 = 1$, iar pentru $y_2(x)$

se obține $x_{v_2} = \frac{1}{2}$, $y_{v_2} = \frac{7}{4}$, $x'_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$

și pentru $x = 0$, $y = 2$. În plus punctele de intersecție ale celor două curbe, în cazul în care există, sînt soluțiile sistemului

$$\begin{cases} y = x^2 + x - 2 \\ y = x^2 - x + 2 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 4.$$

Folosind rezultatele de mai sus, graficul celor două parabole arată ca în fig. XI.24.

Din intersecția graficului cu dreapta variabilă $y = m$, rezultă următorul tabel de discuție al rădăcinilor ecuației:

m	Poziția dreptei $y = m$ față de grafic	Natura rădăcinilor
$m \in \left(-\infty, -\frac{9}{4}\right)$	Dreapta nu taie graficul [se află mai jos de $V_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$]	4 răd. complexe
$m = -\frac{9}{4}$	Dreapta trece prin V_1	2 răd. reale $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$ 2 răd. complexe
$m \in \left(-\frac{9}{4}, -2\right)$	Dreapta se află între $V_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ și $B(0, -2)$	2 răd. reale < 0 ; 2 răd. complexe
$m \in \left[-2, \frac{7}{4}\right)$	Dreapta se află între $B(0, -2)$ inclusiv și $V_2\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$ exclusiv	2 răd. reale; 2 răd. complexe
$m = \frac{7}{4}$	Dreapta taie graficul în patru puncte	4 răd. reale $x_1 < 0 < x_2$, $x_3 = x_4 = \frac{1}{2}$
$m \in \left(\frac{7}{4}, 2\right)$	Dreapta se află între $V_2\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$ și $C(0, 2)$ și taie graficul în 4 puncte	4 răd. reale $x_1 < 0 < x_2 < x_3 < x_4$
$m = 2$	Dreapta trece prin $C(0, 2)$ și taie graficul în 4 puncte	4 răd. reale $x_1 < 0 < x_2, x_3 = 0$
$m \in (2, 4)$	Dreapta se află între $C(0, 2)$ și $D(2, 4)$ și taie graficul în 4 puncte	4 răd. reale $x_1 < x_3 < 0 < x_4 < x_2$
$m = 4$	Dreapta trece prin $D(2, 4)$ și taie graficul în 4 puncte	4 răd. reale $x_1 < x_3 < 0$, $x_2 = x_4 = 2$
$m \in (4, +\infty)$	Dreapta taie graficul în 4 puncte	4 răd. reale $x_1 < x_3 < 0 < x_2 < x_4$

XI. 25. Folosind metoda grafică să se discute, după valorile parametrului real m , natura rădăcinilor ecuației

$$\sqrt{2(1-x)} - \sqrt{2x} - (2+m\sqrt{2}) = 0. \quad (1)$$

Rezolvare. Se scrie ecuația (1) sub formă echivalentă

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{x} - \sqrt{2} = m. \quad (1')$$

Se construiește graficul funcției $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x} - \sqrt{2}$, definită pentru $1-x \geq 0$ și $x \geq 0$, adică $x \in [0, 1]$ și se intersectează cu dreapta variabilă $y = m$.

Tabelul de variație este:

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	+	-	
$f(x)$		$1-\sqrt{2}$	↗	0	↘ $1-\sqrt{2}$

Graficul funcției $f(x)$ este reprezentat în fig. XI.25. Din figură rezultă că pentru $m \in (-\infty, 1-\sqrt{2})$ ecuația (1) nu admite rădăcini reale; pentru $m = 1-\sqrt{2}$ ecuația admite rădăcinile $x_1 = 0$ și $x_2 = 1$; pentru $m \in (1-\sqrt{2}, 0)$ ecuația admite două rădăcini reale diferite, pozitive, $x_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $x_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, iar pentru $m = 0$ ecuația admite rădăcina dublă $x = \frac{1}{2}$.

XI. 26. Folosind metoda grafică, să se discute după valorile parametrului real m , ecuația

$$\cos^3 \alpha + 6 \sin^2 \alpha + 9 \cos \alpha - 4m - 6 = 0 \quad (1)$$

Rezolvare. Înlocuind $\sin^2 \alpha$ prin $1 - \cos^2 \alpha$ și punind $\cos \alpha = x$, ecuația (1) se scrie sub forma

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 4m = 0, \quad (2)$$

cu condiția $x \in [-1, 1]$. Ecuația se mai scrie $\frac{1}{4}(x^3 - 6x^2 + 9x) = m$. Se construiește

graficul funcției $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 6x^2 + 9x)$, se ia apoi restricția lui la intervalul $[-1, 1]$

și se intersectează cu dreapta variabilă $y = m$. Funcția $f(x)$ se anulează pentru $x_1 = 0$ și $x_{2,3} = 3$. Derivata $f'(x) = \frac{3}{4}(x^2 - 4x + 3)$ se anulează pentru $x'_1 = 1$ și $x'_2 = 3$.

Derivata a doua $f''(x) = \frac{3}{2}(x - 2)$ se anulează pentru $x = 2$.

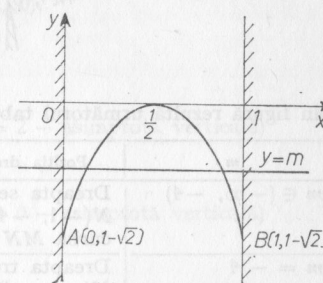


Fig. XI. 25

Tabelul de variație este următorul:

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$
$f''(x)$	-	-	-	-	0	+

Curba este reprezentată în fig. XI.26

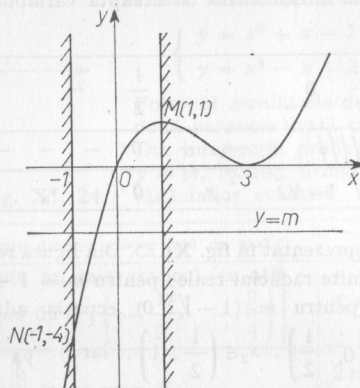


Fig. XI. 26

Din figură rezultă următorul tabel al discuției ecuației (1):

m	Poziția dreptei $y = m$ față de grafic	Natura rădăcinilor ecuației (1)
$m \in (-\infty, -4)$	Dreapta se găsește sub punctul $N(-1, -4)$ deci nu taie arcul de curbă MN din intervalul $[-1, 1]$	Ecuația (1) nu admite rădăcini
$m = -4$	Dreapta trece prin punctul $N(-1, -4)$ adică taie arcul de curbă MN pentru $x = -1$	Ecuația (1) admite rădăcini $\cos \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$
$m \in (-4, 0)$	Dreapta taie arcul de curbă MN într-un punct.	Ecuația (1) admite rădăcini: $-1 < \cos \alpha < 0$
$m = 0$	Dreapta taie arcul de curbă MN în punctul $O(0, 0)$	Ecuația (1) admite rădăcini: $\cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
$m \in (0, 1)$	Dreapta taie arcul de curbă MN într-un punct	Ecuația (1) admite rădăcini: $0 < \cos \alpha < 1$
$m = 1$	Dreapta trece prin punctul $M(1, 1)$	Ecuația (1) admite rădăcini $\cos \alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$m \in (1, +\infty)$	Dreapta nu taie arcul de curbă MN	Ecuația (1) nu admite rădăcini

XI. 27. Să se discute, în raport cu parametrul real m , rădăcinile reale ale ecuației transcendente $e^{\frac{1}{x}} - (x-2)m = 0$.

Rezolvare. Se pune ecuația sub forma $\frac{1}{x-2} \cdot e^{\frac{1}{x}} = m$ și se construiește graficul funcției

$$f(x) = \frac{1}{x-2} e^{\frac{1}{x}} = \begin{cases} \frac{1}{x-2} \cdot e^{\frac{1}{x}}, & \text{pentru } x \in (0, 2) \cup (2, +\infty), \\ \frac{1}{x-2} \cdot e^{-\frac{1}{x}}, & \text{pentru } x \in (-\infty, 0), \end{cases}$$

Pe care îl intersectează cu dreapta variabilă $y = m$.

Pentru $x > 0$ derivata este $f'(x) = -\frac{x^2 + x - 2}{x^2(x-2)^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1, f'(x) > 0$ pentru $x \in (0, 1)$ și $f'(x) < 0$ pentru $x \in (1, 2) \cup (2, +\infty)$. Pentru $x < 0$ derivata este $f'(x) = -\frac{x^2 - x + 2}{x^2(x-2)^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}} \Rightarrow f'(x) < 0, \forall x \in (-\infty, 0)$.

Asimptotele graficului sînt:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \quad (x = 2 - \text{asimptotă verticală})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad (x = 0 - \text{asimptotă verticală})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad (y = 0 - \text{asimptotă orizontală})$$

Tabelul de variație este următorul iar graficul este reprezentat în fig. XI.27:

x	$-\infty$	-	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-	+	+	0
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	$-e$

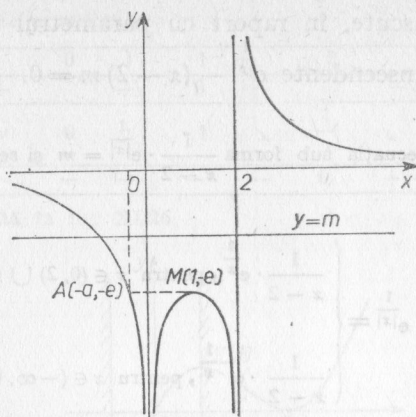


Fig. XI. 27

Din figură — rezultă — următorul tabel de discuție:

m	Poziția dreptei $y = m$ față de grafic	Natura rădăcinilor
$m \in (-\infty, -e)$	Dreapta taie graficul în 3 puncte	3 răd. reale; $x_1 \in (0, 1)$, $x_2 \in (1, 2)$, $x_3 \in (-a, 0)$, $a > 0$
$m = -e$	Dreapta trece prin $M(1, -e)$	2 răd. reale una*) pentru ecuația transcendentă $\frac{1}{e^x} + (x-2)e = 0$ și alina $x = 1$ și alta pentru ecuația $e^{-\frac{1}{x}} + (x-2) \cdot e = 0 \Rightarrow x = -a < 0$
$m \in (-e, 0)$	Dreapta taie graficul într-un singur punct	1 răd. reală $x_1 \in (-\infty, -a)$, $a > 0$
$m = 0$	Dreapta nu taie graficul	Ecuația se reduce la $\frac{1}{e^{ x }} = 0$, care este imposibilă
$m \in (0, +\infty)$	Dreapta taie graficul într-un singur punct	1 răd. reală, $x_1 \in (2, +\infty)$

*) $x = 1$ nu este rădăcină multiplă, deși $f'(1) = 0$. Noțiunea de rădăcină multiplă se definește numai pentru ecuații algebrice.

XI. 28. Se consideră ecuația

$$x^3 + 2(m-1)x^2 - (m-2)x - m - 1 = 0, \quad (1)$$

unde m este un parametru real.

a) Să se discute natura și semnul rădăcinilor ecuației (1)

b) Să se determine valorile lui m pentru care

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 6.$$

Rezolvare. a) Se scrie ecuația (1) sub forma

$(x-1)[x^2 + (2m-1)x + m+1] = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ și ecuația de gradul doi: $x^2 + (2m-1)x + m+1 = 0$ cu rădăcinile x_2 și x_3 . Se întocmește următorul tabel al discuției rădăcinilor:

m	$\Delta = 4m^2 - 8m - 3$	$P = m + 1$	$S = 1 - 2m$	Natura rădăcinilor
$m \in (-\infty, -1)$	+	-	+	răd. reale de semne contrare $x_2 > 0$, $x_3 < 0$, $x_2 > x_3 $
$m = -1$	+	0	+	răd. reale $x_2 = 0$, $x_3 = 3$
$m \in \left(-1, \frac{2-\sqrt{7}}{2}\right)$	+	+	+	răd. reale pozitive
$m = \frac{2-\sqrt{7}}{2}$	0	+	+	răd. reale egale $x_2 = x_3 = \frac{\sqrt{7}-1}{2}$
$m \in \left(\frac{2-\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2}\right)$	-	+	+	răd. complexe
$m = \frac{1}{2}$	-	+	0	răd. imaginare
$m \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2+\sqrt{7}}{2}\right)$	-	+	-	răd. complexe
$m = \frac{2+\sqrt{7}}{2}$	0	+	-	răd. reale egale $x_2 = x_3 = -\frac{1+\sqrt{7}}{2}$
$m \in \left(\frac{2+\sqrt{7}}{2}, +\infty\right)$	+	+	-	răd. reale negative

b) Se calculează mai întâi în funcție de m suma $x_2^3 + x_3^3$:

$$\begin{aligned} x_2^3 + x_3^3 &= (x_2 + x_3)^3 - 3x_2x_3 \cdot (x_2 + x_3) = (1-2m)^3 - 3(m+1) \cdot (-2m) = \\ &= -8m^3 + 18m^2 - 3m - 2. \end{aligned}$$

Valorile lui m pentru $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 6$ se obțin rezolvând ecuația de gradul 3 în m :

$$8m^3 - 18m^2 + 3m + 7 = 0 \Rightarrow m_1 = 1, m_2 = \frac{7}{4}, m_3 = -\frac{1}{2}.$$

Observație. $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ se poate calcula și prin metoda folosită la problema XI.3.

XI. 29. Se dă ecuația

$$x^2(x^2 + 4x + 4) - 2x^2 - 4x - m = 0, \quad (1)$$

unde m este un parametru real.

a) Să se rezolve ecuația și să se afle valorile lui m pentru care ecuația are toate rădăcinile reale.

b) Să se afle valorile lui m astfel ca ecuația să admită o rădăcină rațională dublă și apoi să se rezolve.

c) Să se afle valorile lui m astfel ca ecuația să admită o rădăcină pozitivă dublă și apoi să se rezolve.

Rezolvare. a) Se scrie ecuația sub forma

$$x^2(x+2)^2 - 2x(x+2) - m = 0.$$

Notînd $x(x+2) = t$, ecuația devine $t^2 - 2t - m = 0 \Rightarrow t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+m}$; rezultă ecuațiile:

$$x^2 + 2x - 1 - \sqrt{1+m} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2 + \sqrt{1+m}},$$

$$x^2 + 2x - 1 + \sqrt{1+m} = 0 \quad x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{2 - \sqrt{1+m}}.$$

Rădăcinile $x_i (i = 1, 2, 3, 4)$ sînt reale dacă sînt satisfăcute condițiile: $1 + m \geq 0$, $2 - \sqrt{1+m} \geq 0 \Rightarrow m \in [-1, +\infty) \cap (-\infty, 3] = [-1, 3]$. Deci rădăcinile ecuației sînt reale pentru $m \in [-1, 3]$.

b) Ecuația (1) se scrie astfel:

$$x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x - m = 0. \quad (1')$$

Ecuația derivată este

$$x^3 + 3x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x'_1 = -1, x'_{2,3} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Cum ecuația derivată admite singura rădăcină rațională $x'_1 = -1$, atunci $x = -1$ va fi rădăcină dublă pentru ecuația (1'). Introducînd $x = -1$ în (1') se obține $m = 3$. Pentru $m = 3$ ecuația (1) are rădăcină dublă $x = -1$, celelalte rădăcini fiind -3 și 1 .

c) Din b) rezultă că rădăcina pozitivă a ecuației derivate este $x'_3 = -1 + \sqrt{2} > 0$ și atunci $x = -1 + \sqrt{2}$ este rădăcină pozitivă dublă pentru ecuația (1'), adică rădăcinile ecuației (1') sînt $x_{1,2} = -1 + \sqrt{2}$, $x_{3,4} = -1 - \sqrt{2}$ și deci (1') se poate scrie sub forma

$$x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x - m \equiv [(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})]^2.$$

După efectuarea calculelor se obține prin identificare $m = -1$.

XI. 30. Se dă ecuația

$$(m^3 - 7m^2 + 16m - 12)x^3 + x - 1 = 0, \quad (1)$$

unde m este un parametru real.

a) Să se rezolve ecuația ale cărei rădăcini sînt inversele rădăcinilor ecuației (1). Să se scrie rădăcinile ecuației date.

b) Să se determine mulțimea valorilor lui m pentru care rădăcinile ecuației (1) sînt reale și distincte.

c) Pentru ce valori ale lui m ecuația (1) are o rădăcină dublă? Să se rezolve în acest caz ecuația (1).

Rezolvare. a) Ecuația (1) se scrie sub forma

$$(m-2)^2(m-3)x^3 + x - 1 = 0.$$

Făcînd transformarea $y = \frac{1}{x}$, se obține ecuația

$$y^3 - y^2 - (m-2)^2(m-3) = 0 \quad (2)$$

care se mai scrie și astfel:

$$y^3 - (m-2)^3 - [y^2 - (m-2)^2] = 0 \Rightarrow [y - (m-2)] \cdot [y^2 + (m-3)y +$$

$$+ (m-2)(m-3)] = 0 \Rightarrow y_1 = m-2, y_{2,3} = \frac{-(m-3) \pm \sqrt{(m-3)(5-3m)}}{2}.$$

Rădăcinile ecuației (1) sînt

$$x_1 = \frac{1}{m-2}, \quad x_{2,3} = \frac{2}{3-m \pm \sqrt{(3-m)(3m-5)}}, \quad m \neq 2, m \neq 3, m \neq \frac{5}{3}.$$

b) Rădăcinile ecuației (1) sînt reale și diferite dacă

$$\frac{1}{m-2} \neq \frac{2}{3-m \pm \sqrt{(3-m)(3m-5)}}, \quad (3-m)(3m-5) > 0 \Rightarrow m \neq \frac{8}{3} \text{ și } m \in \left(\frac{5}{3}, 3\right) \setminus \{2\} \Rightarrow m \in \left(\frac{5}{3}, 3\right) \setminus \left\{2, \frac{8}{3}\right\}.$$

c) Dacă ecuația (1) admite o rădăcină dublă atunci și ecuația (2) admite o rădăcină dublă. Rădăcina dublă a ecuației (2) se află printre rădăcinile ecuației derivate:

$$3y^2 - 2y = 0 \Rightarrow y_1 = 0, y_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \left(x = \frac{1}{y} \Rightarrow y \neq 0 \right).$$

Pentru $x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$ (rădăcină dublă), ecuația (1) dă:

$$27m^3 - 189m^2 + 432m - 320 = 0 \Rightarrow (3m-5)(9m^2 - 48m + 64) = 0 \Rightarrow m_1 = \frac{5}{3}, m_{2,3} = \frac{8}{3}. \text{ Deci ecuația (1) are o rădăcină dublă: } x_1 = x_2 = \frac{3}{2}, \text{ pentru } m = \frac{5}{3} \text{ și } m = \frac{8}{3}.$$

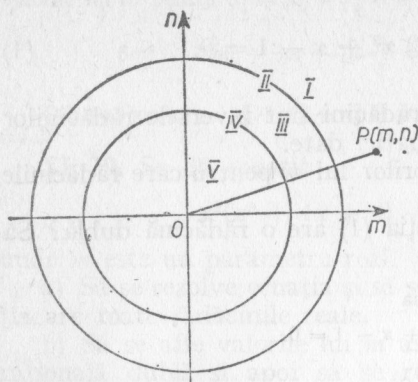


Fig. XI. 31

b) Pentru $m = n = 0$, să se calculeze cu două zecimale exacte rădăcinile ecuației obținute.

Rezolvare. a) Derivata $f'(x) = 6x^2 - 6$ are rădăcinile $x'_1 = -1$, $x'_2 = 1$. Se formează șirul lui Rolle:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$m^2 + n^2 - 8$	$m^2 + n^2 - 16$	$+\infty$

Numărul rădăcinilor reale va depinde de semnul expresiilor în m^2 și n^2 , care, egale cu zero, reprezintă în sistemul de axe de coordonate mon , două cercuri de raze $r_1 = 2\sqrt{2}$ și $r_2 = 4$ cu centrele în originea axelor de coordonate. Aceste cercuri împart planul în 5 regiuni (fig. XI.31). Natura rădăcinilor ecuației depinde de poziția punctului $P(m, n)$ în plan. Tabelul discuției rădăcinilor este:

Poziția punctului $P(m, n)$ în plan	$f(-\infty)$	$f(-1)$	$f(1)$	$f(+\infty)$	Natura rădăcinilor
$P \in$ regiunii I, adică $ OP > 4$	$-\infty$	$+$	$+$	$+$	1 răd. reală $\in (-\infty, -1)$ 2 răd. complexe
$P \in$ regiunii II, deci $ OP = 4$	$-\infty$	$+$	0	$+$	3 răd. reale $x_1 = x_2 = 1$ $x_3 \in (-\infty, -1)$
$P \in$ regiunii III, adică $\sqrt{2} \cdot 2 < OP < 4$	$-\infty$	$+$	$-$	$+$	3 răd. reale
$P \in$ regiunii IV, adică $ OP = 2 \cdot \sqrt{2}$	$-\infty$	0	$-$	$+$	3 răd. reale $x_1 = x_2 = -1$ $x_3 \in (1, +\infty)$
$P \in$ regiunii V deci $0 \leq OP < 2\sqrt{2}$	$-\infty$	$-$	$-$	$+$	1 răd. reală $\in (1, +\infty)$ 2 răd. complexe

Pentru $m = \frac{5}{3}$ ecuația (1) se scrie $4x^3 -$

$-27x + 27 = 0$, cu rădăcinile $x_{1,2} = \frac{3}{2}$,

$x_3 = -3$.

Pentru $m = \frac{8}{3}$ ecuația (1) se scrie $4x^3 -$

$-27x + 27 = 0$, cu rădăcinile $x_{1,2} = \frac{3}{2}$,

$x_3 = -3$.

XI. 31. a) Să se discute cu teorema lui Rolle rădăcinile ecuației $f(x) = 2x^3 - 6x + m^2 + n^2 - 12 = 0$, ($m, n \in R$), împărțind planul mon în regiuni după natura rădăcinilor.

b) Pentru $m = n = 0$, se obține ecuația $\varphi(x) \equiv x^3 - 3x - 6 = 0$ care are o singură rădăcină reală $x_1 \in (1, +\infty)$. Se calculează această rădăcină cu două zecimale exacte atât prin metoda coardei cât și prin metoda lui Newton. Se restrânge prin încercări intervalul dat de șirul lui Rolle. Se obține $\varphi(2) = -4$, $\varphi(3) = 12 \Rightarrow x_1 \in (2, 3)$. Se fracționează intervalul găsit: $\varphi(2, 5) = 1,225 > 0 \Rightarrow x_1 \in (2, 2,5)$; $\varphi(2, 4) = 0,624$, $\varphi(2, 3) = -0,733 \Rightarrow x_1 \in (2, 3; 2, 4)$. Deoarece $\varphi''(x) = 6x > 0$, în acest interval, rezultă că vom aproxima rădăcina prin lipsă prin metoda coardei și prin exces prin metoda lui Newton:

$$h_1 = -\frac{(b-a) \cdot \varphi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = -\frac{0,1 \cdot (-0,733)}{0,624 + 0,733} \approx 0,054,$$

$$h_1 = -\frac{\varphi(b)}{\varphi'(b)} = -\frac{0,624}{14,28} \approx -0,044.$$

Deci $x_c = 2, 3 + 0,054 = 2,354$ și $x_t = 2,4 - 0,044 = 2,356$, adică rădăcina cu două zecimale exacte este $x_1 = 2,35$.

XI. 32. a) Să se discute natura rădăcinilor ecuației

$$f(x) \equiv 2x^3 + 3(m-n)x^2 - 6mnx + 2m^2n^2 = 0, \quad (1)$$

când m și n reprezintă coordonatele unui punct din planul mon .

b) Pentru $m = n = 1$ să se calculeze cu trei zecimale exacte cea mai mare rădăcină pozitivă a ecuației (1).

Rezolvare. a) $f'(x) \equiv 6[x^2 + (m-n)x - mn] = 0 \Rightarrow x'_1 = -m$, $x'_2 = n$. Șirul lui Rolle atașat polinomului $f(x)$ este:

$f(-\infty)$	$f(-m)$	$f(n)$	$f(+\infty)$
$-\infty$	$m^2(m+2n^2+3n)$	$n^2(-n+2m^2-3m)$	$+\infty$

Numărul rădăcinilor reale va depinde de semnul expresiilor $E_1 = 2m^2 + 3n + m$ și $E_2 = 2m^2 - 3m - n$ care egale cu zero reprezintă în planul mon , două parabole:

$$(P_1): m = -2n^2 - 3n; \quad (P_2): n = 2m^2 - 3m.$$

Se reprezintă grafic cele două parabole și se urmărește poziția punctului mobil $P(m, n)$ față de ele. Pentru parabola (P_1) se obține: $m = 0 \Rightarrow n_1 = 0$, $n_2 = -\frac{3}{2}$, $n_0 = -\frac{3}{4}$,

$m_0 = \frac{9}{8}$ și tabelul de valori este:

n	$-\infty$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
m	$-\infty$	$\nearrow -2$	$\nearrow 0$	$\nearrow 1$	$\nearrow \frac{9}{8}$	$\searrow 1$	$\searrow 0$	$\searrow -2$	$\searrow -5$	$-\infty$

Pentru parabola (P_2), rezultă; $n = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = \frac{3}{2}$, $m_{v2} = \frac{3}{4}$, $n_{v2} = -\frac{9}{8}$ și tabelul de valori este:

m	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$								
n	$+\infty$	$\searrow$	5	$\searrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{9}{8}$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$+\infty$

Graficul celor două parabole este dat în fig. XI.32.

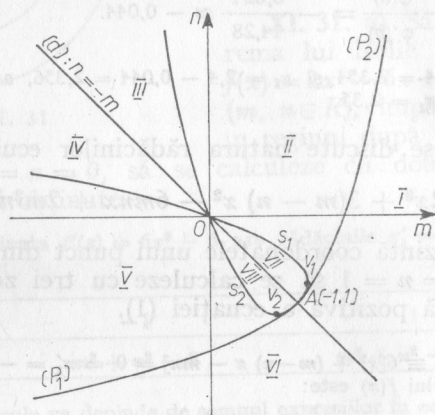


Fig. XI. 32

Prin verificare se constată că $E_1 > 0$ pentru punctele $P(m, n)$ din exteriorul parabolei (P_1) și $E_1 < 0$ pentru punctele $P(m, n)$ din interiorul parabolei (P_1). La fel, $E_2 > 0$ pentru punctele din exteriorul parabolei (P_2) și $E_2 < 0$ pentru punctele din interiorul parabolei (P_2). Pentru a separa cazurile $n > -m$ și $n < -m$ se duce dreapta (d): $n = -m$. Tabelul discuției rădăcinilor este:

Regiunea		$f(-\infty)$ $-\infty$	$f(-m)$ $m^2 \cdot E_1$	$f(n)$ $n^2 \cdot E_2$	$f(+\infty)$ $+\infty$	Natura rădăcinilor
$n > -m$	I	-	+	+	+	1 răd. reale, 2 răd. complexe
	II	-	+	-	+	3 răd. reale
	III	-	+	+	+	1 răd. reale 2 răd. complexe
	VII	-	-	-	+	1 răd. reală, 2 răd. complexe
	$P \in (P_2) \setminus \widehat{OS_2A}$	-	+	0	+	$x_1 = x_2 = n$, $x_3 \in (-\infty, -m)$
	$P \in \widehat{OS_1A}$	-	0	-	-	$x_1 = x_2 = -m$, $x_3 \in (n, +\infty)$

Regiunea		$f(-\infty)$ $-\infty$	$f(n)$ $n^2 \cdot E_2$	$f(-m)$ $m^2 \cdot E_1$	$f(+\infty)$ $+\infty$	Natura rădăcinilor
$n < -m$	IV	-	+	+	+	1 răd. reale, 2 răd. complexe
	V	-	+	-	+	3 răd. reale
	VI	-	-	+	+	1 răd. reale 2 răd. complexe
	VIII	-	-	-	+	1 răd. reale 2 răd. complexe
	$P \in (P_1) \setminus \widehat{OS_1A}$	-	+	0	+	$x_1 = x_2 = -m$, $x_3 \in (-\infty, n)$
	$P \in \widehat{OS_2A}$	-	0	-	+	$x_1 = x_2 = n$, $x_3 \in (-m, +\infty)$

$n = -m$	$P \in (d)$	$f(-\infty)$ $-\infty$	$f(-m)$ $2m^2(m-1)$	$f(+\infty)$ $+\infty$	Natura rădăcinilor
	$m \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$	-	+	+	1 răd. reală, 2 răd. complexe
	$m \in (0, 1)$	-	-	+	1 răd. reale, 2 răd. complexe
	$m = 0$	-	0	+	$x_1 = x_2 = x_3 = 0$
	$m = 1$	-	0	+	$x_1 = x_2 = x_3 = -1$

b) Pentru $m = n = 1$ ecuația (1) devine $\varphi(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$; $\varphi'(x) = 0$, pentru $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, iar șirul lui Rolle este:

$\varphi(-\infty)$	$\varphi(-1)$	$\varphi(1)$	$\varphi(+\infty)$
$-\infty$	+	-	$+\infty$

Ecuația $\varphi(x) = 0$ are toate rădăcinile reale, iar cea mai mare rădăcină pozitivă este mai mare ca 1. Cum $\varphi(2) = 3$, rezultă că această rădăcină este cuprinsă între 1 și 2. Prin încercări deducem că rădăcina este cuprinsă între $a = 1,5$ și $b = 1,6$ [$\varphi(1,5) = -0,125$, $\varphi(1,6) = 0,296$]. Intervalul de plecare este $(1,5; 1,6)$. Cum $\varphi''(x) = 6x > 0$ în acest interval, vom aproxima rădăcina prin lipsă prin metoda coardei și prin exces prin metoda tangentei (Newton)

$$h_1 = -\frac{0,1 \cdot (-0,125)}{0,296 + 0,125} \approx 0,03; \quad h_1 = -\frac{0,296}{4,68} \approx -0,06.$$

Deci $a_1 = 1,53$, $b_1 = 1,54$. Se aplică noului interval (a_1, b_1) aceleași metode; se găsește:

$$k_2 = -\frac{0,01 \cdot (-0,008423)}{0,032264 + 0,008423} \approx 0,00207; \quad k_3 = -\frac{0,032264}{4,1148} \approx -0,00784.$$

Deci rădăcina cu trei zecimale exacte este $x_0 \approx 1,532$.

PROBLEME PROPUSE

Să se rezolve ecuațiile:

XI. 1. $x^3 = 15x + 4$.

XI. 2. $x^3 - 7x - 6 = 0$.

XI. 3. $x^3 - 15x^2 + 15x - 1 = 0$.

XI. 4. $x^4 + \sqrt{1 - x^2} = 1$.

XI. 5. Se dă ecuația $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, ale cărei rădăcini le notăm cu x_1, x_2, x_3 . Să se formeze ecuația în y care are ca rădăcini $y_1 = x_1^2 + x_2^2$, $y_2 = x_2^2 + x_3^2$, $y_3 = x_3^2 + x_1^2$.

XI. 6. Se consideră ecuația $x^3 - 11x^2 + 24x + 6m = 0$. Să se determine valorile parametrului m și să se rezolve ecuația știind că admite o rădăcină dublă.

XI. 7. Se dă ecuația $x^3 - 12x^2 + 47x + p = 0$. Să se determine parametrul p și să se rezolve ecuația știind că rădăcinile sînt în progresie aritmetică.

XI. 8. Să se scrie ecuația de cel mai mic grad, cu coeficienți raționali, care admite ca rădăcini $x_1 = \frac{-4}{1-\sqrt{5}}$, $x_2 = \frac{5}{2-3i}$.

XI. 9. Se dă ecuația $x^3 + 2x^2 - (m+8)x + 2m = 0$. Să se determine m astfel încît între rădăcini să existe relația $x_2x_3 + 6x_1 = 0$ și apoi să se rezolve ecuația.

XI. 10. Să se determine mărimile laturilor unui triunghi dreptunghic știind că ele verifică o ecuație de forma $x^3 - 12x^2 + (50 - m)x - 20m = 0$, unde m este un parametru real.

XI. 11. Se dă ecuația $x^4 - 3x^3 - 12x^2 + mx - 15 = 0$.

a) Să se determine m astfel încît suma a două rădăcini să fie egală cu -2 .

b) Cu m astfel determinat să se rezolve ecuația.

XI. 12. Se consideră ecuația $3x^4 + mx^3 + 2x^2 + 12x - 8 = 0$. Să se determine m și să se rezolve ecuația astfel încît produsul a două rădăcini să fie egal cu 2.

XI. 13. Să se determine parametrul m astfel ca ecuația $2x^4 - 5x^3 + 2mx^2 - 10x + 4 = 0$ să admită două rădăcini al căror produs să fie egal cu 1; să se rezolve apoi ecuația.

XI. 14. Se dă ecuația

$$x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + 5x + \gamma = 0. \quad (1)$$

a) Să se determine α, β, γ astfel ca primele trei rădăcini ale ecuației (1) să fie rădăcinile ecuației

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0. \quad (2)$$

b) Să se rezolve ecuația (1) cu α, β, γ determinanți la punctul a).

XI. 15. Se dă ecuația

$$x^5 - 20x^4 + 145x^3 - 470x^2 + 666x - 320 = 0. \quad (1)$$

Să se rezolve ecuația știind că primele două rădăcini formează o progresie aritmetică cu rația $r > 0$, iar ultimele trei rădăcini formează o progresie geometrică cu rația $q > 1$, astfel încît

$$2x_1 + r = x_3(1 + q). \quad (2)$$

XI. 16. Se consideră ecuația $x^4 - 2x^3 + mx - 1 = 0$.

Să se determine m astfel încît ecuația să admită o rădăcină triplă; să se rezolve în acest caz ecuația.

XI. 17. Se dă ecuația $x^6 + \alpha x^5 + \beta x^4 + \gamma x^3 + \delta x^2 + 12x + 8 = 0$. Să se rezolve și să se determine parametrii raționali $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ cunoscînd că ecuația are două rădăcini duble și $x_1 = x_2 = -x_5$, $x_3 = x_4 = -x_6$.

XI. 18. Să se rezolve ecuația $\log_a x + \log_b x + \log_c x = \frac{22}{3}$ știind că bazele a, b, c sînt în progresie geometrică, produsul celor trei baze fiind 512, iar pătratul lui b este media armonică între $12a/\sqrt{2}$ și $3c/\sqrt{2}$. Să se determine toate rădăcinile raționale ale următoarelor ecuații:

XI. 19. $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - 9x^2 - 6x - 1 = 0$.

XI. 20. $36x^4 - 36x^3 - 7x^2 + 16x - 4 = 0$.

XI. 21. $6x^4 + 5x^3 + 10x^2 - 3x - 2 = 0$.

Pentru ecuațiile următoare să se afle numărul rădăcinilor reale și să se separe aceste rădăcini:

XI. 22. $x^3 - 5x^2 + 1 = 0$. **XI. 23.** $x^3 + 2x^2 - 7x + 1 = 0$.

XI. 24. $3x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x + 2 = 0$. **XI. 25.** $8x^5 - 15x^4 - 30x^2 - 40x + 16 = 0$.

XI. 26. $3x^4 - 20x^3 + 30x^2 + 60x - 72 \cdot \ln|x| + 1 = 0$, $x \neq 0$.
Să se rezolve ecuațiile în ipoteza că admit rădăcini multiple:

XI. 27. $x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 27x - 54 = 0$.

XI. 28. $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4 = 0$.

XI. 29. $8x^5 + 4x^4 - 10x^3 - x^2 + 4x - 1 = 0$.

XI. 30. $x^5 - 5x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4 = 0$.

XI. 31. Să se rezolve ecuațiile

$$x^3 + mx^2 + (1 - 3m)x + 3m = 0,$$

$$x^3 + x + m = 0,$$

știind că admit o rădăcină comună.

XI. 32. Să se determine m și n astfel ca ecuațiile:

$$x^3 + mx + n = 0.$$

$$x^4 + (2n + 1)x + 2m = 0$$

să admită două rădăcini comune. Să se rezolve apoi ecuațiile.

Să se discute după valorile parametrului real m natura rădăcinilor ecuațiilor:

XI. 33. $x(x + 1)^2 - m = 0$. **XI. 34.** $3x^5 - 125x^3 + 2160x + m = 0$.

XI. 35. $16x^5 - 20x^3 + 5x - m = 0$. **XI. 36.** $x^4 - 6x^2 + mx + 24 = 0$.

XI. 37. $3x^4 - 8mx^3 - 6m^2x^2 + 24m^3x - 17m^2 = 0$.

XI. 38. $12x^2 - 4x - 4\ln x + m - 1 = 0$, $x > 0$.

Să se discute ecuațiile următoare, $M(a, b)$ fiind un punct din plan:

XI. 39. $x^3 - 3a^2x + 2b^3 = 0$. **XI. 40.** $x^3 - 3a^2x + ab = 0$.

XI. 41. $x^4 - 4(2a + b)x^3 + 6(2a + b)^2x^2 - 4(2a + b)^3x + 4(2a + b)^2(2ab + 5) - (5ab + 8)^2 = 0$.

XI. 42. Se dau ecuațiile

$$x^4 - 3x + 1 = 0, \quad (1)$$

$$x^4 - 2x^3 + 6x - 3 = 0. \quad (2)$$

a) Să se calculeze cu trei zecimale exacte cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuației (1).

b) Să se calculeze cu trei zecimale exacte rădăcinile ecuației (2).

XI. 43. Se dă ecuația

$$f(x) \equiv x^6 - 6x^5 + 17x^4 - 28x^3 + 28x^2 - 16x + 4 = 0.$$

a) Să se rezolve.

b) Să se demonstreze că punctele ale căror afixe sînt rădăcinile ecuației $f(x) = 0$, sînt două cîte două simetrice în raport cu punctul al cărui afix este $(1, i0)$.

Să se discute grafic în raport cu parametrul real m ecuațiile:

XI. 44. $x^2 - (2x - 4)m = 0$.

XI. 45. $\sqrt[3]{(x^2 - 3x + 2)^2} - m\sqrt[3]{x^2 - 3x + 2} - 1 = 0$.

XI. 46. $\sqrt[3]{2x^2 - 7x + 2} = \frac{m}{\sqrt{x + 2}}$. **XI. 47.** $2x^3 - mx^2 - 9x + 5m = 0$.

XI. 48. $\sqrt{x^2 + x} - me^{\frac{1}{x}} = 0$. **XI. 49.** $|x + 1| - me^{|x-1|} = 0$.

Capitolul XII

STRUCTURI ALGEBRICE

PROBLEME REZOLVATE

XII. 1. În corpul $(R, +, \cdot)$ al numerelor reale se introduce legea de compoziție internă $*$ definită astfel:

$$\forall x, y \in R, x * y = ax + ay + bxy + c,$$

unde $a, b, c \in R$.

Știind că elementul neutru este $e = -4$ și că orice element $x \neq -5$ admite un simetric, să se determine a, b, c și apoi să se calculeze:

$$E = \frac{3 * 2 - 1}{1 * 2 + 3}.$$

Rezolvare. Deoarece $e = -4$ este elementul neutru, rezultă: $-4 * x = x * (-4) = x$, pentru orice $x \in R$, adică $\forall x \in R, ax - 4a - 4bx + c = x \Rightarrow x(a - 4b - 1) + c - 4a \equiv 0, \forall x \in R \Rightarrow a - 4b - 1 = 0$ și $c - 4a = 0 \Rightarrow a = 4b + 1, c = 16b + 4$. Pe de altă parte, $\forall x \in R \setminus \{-5\}, \exists \tilde{x} \in R \setminus \{-5\}, \tilde{x}$ - simetricul lui x , astfel că

$$\begin{aligned} x * \tilde{x} = e &\Rightarrow ax + a\tilde{x} + bx\tilde{x} + c = -4 \Rightarrow \tilde{x} = -\frac{ax + c + 4}{a + bx} = \\ &= -\frac{(4b + 1)x + 16b + 8}{bx + 4b + 1} \text{ pentru orice } bx + 4b + 1 \neq 0, \text{ ceea ce are loc } \forall x \in \end{aligned}$$

$R \setminus \{-5\}$. Deci pentru $x = -5, bx + 4b + 1 = 0 \Rightarrow b = 1, a = 5, c = 20$ și legea de compoziție căutată se scrie: $\forall x, y \in R, x * y = 5x + 5y + xy + 20$.

Cu această lege de compoziție se obține

$$3 * 2 = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 20 = 51; 1 * 2 = 5 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 20 = 47,$$

$$E = \frac{51 - 1}{37 + 3} = \frac{5}{4}.$$

XII. 2. În corpul $(R, +, \cdot)$ al numerelor reale se introduc legile de compoziție internă $\circ$ și $*$ definite astfel:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in R; \quad x \circ y &= ax + ay + b, \\ x * y &= cx + cy + d, \end{aligned} \quad a, b, c, d \in R, a \neq c.$$

a) Să se determine $a, b, c, d \in R$ astfel ca aceste legi de compoziție să satisfacă relația

$$(x \circ y) * (x * y) = (x \circ y) \circ (x * y), \quad \forall x, y \in R. \quad (1)$$

b) Să se determine $a, b, c, d \in R, c \neq a$, astfel ca legea de compoziție $*$ să fie distributivă față de legea de compoziție $\circ$.

Rezolvare. a) Relația (1) se scrie succesiv:

$$(ax + ay + b) * (cx + cy + d) = (ax + ay + b) \circ (cx + cy + d),$$

$$ax + ay + b + c(cx + cy + d) + d = a(ax + ay + b) + a(cx + cy + d) + b,$$

$$a^2x - c^2x + (b + d)(a - c) + b - d \equiv 0, \forall x, y \in R \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 - c^2 = 0 \\ (b + d)(a - c) + b - d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ 2a(b + d) + b - d = 0 \end{cases}$$

(cazul $c = a$ este exclus).

$$\text{Rezultă } c = -a, d = -\frac{(2a + 1)b}{2a - 1} \text{ pentru } a \neq \frac{1}{2}.$$

Avem deci legile de compoziție internă:

$$\text{— pentru } a \neq \frac{1}{2}.$$

$$x \circ y = ax + ay + b,$$

$$\forall x, y \in R \quad x * y = -ax - ay - \frac{(2a + 1)b}{2a - 1}.$$

$$\text{— pentru } a = \frac{1}{2}.$$

$$x \circ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y,$$

$$\forall x, y \in R;$$

$$x * y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + d.$$

— pentru $a = -\frac{1}{2}$.

$$\forall x, y \in R; \quad x \circ y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + b,$$

$$x * y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \forall x, y, z \in R, \quad x * (y \circ z) &= (x * y) \circ (x * z) \Rightarrow cx + c(ay + az + b) + d = \\ &= a(cx + cy + d) + a(cx + cz + d) + b \Rightarrow cx(2a - 1) + d(2a - 1) - b(c - 1) \equiv 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2a - 1 = 0, \quad d(2a - 1) - b(c - 1) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}, \quad b = 0 \text{ sau } a = \frac{1}{2}, \quad c = 1 \end{aligned}$$

și legea de compoziție se scriu:

$$\forall x, y \in R, \quad x \circ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \text{ sau } \forall x, y \in R, \quad x \circ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + b,$$

$$x * y = cx + cy + d, \quad x * y = x + y + d.$$

Se verifică ușor că și $(x \circ y) * z = (x * z) \circ (y * z)$.

XII. 3. În mulțimea $E = \{2, 4, 8, 16\}$ se definește legea de compoziție $\circ$ astfel:

$$\forall x, y \in E, \quad x \circ y = \begin{cases} x - (x - y) \cdot [\log_y x], & \text{dacă } y \geq 8, \\ y + |x - y| \cdot [\log_x y], & \text{dacă } y < 8, \end{cases}$$

unde simbolul $[\]$ specifică partea întreagă.

a) Să se verifice dacă legea de compoziție $\circ$ este definită peste tot în mulțimea E și să se specifice ce proprietăți are.

b) Să se rezolve în mulțimea E ecuațiile:

$$(x \circ 16) \circ 8 = 4 \quad (1) \quad 8 \circ (2 \circ x) = 2. \quad (2)$$

Rezolvare. a)

$$2 \circ 2 = 2 + |2 - 2| \cdot [\log_2 2] = 2; \quad 2 \circ 4 = 4 + |2 - 4| \cdot [\log_2 4] = 8;$$

$$2 \circ 8 = 2 - (2 - 8) \cdot [\log_8 2] = 2; \quad 2 \circ 16 = 2 - (2 - 16) \cdot [\log_{16} 2] = 2;$$

$$4 \circ 2 = 2 - |2 - 4| \cdot [\log_4 2] = 2; \quad 4 \circ 8 = 4 - (4 - 8) \cdot [\log_8 4] = 4 \text{ etc.}$$

Se obține astfel următoarea tabelă de compunere a elementelor mulțimii E :

$\circ$	2	4	8	16
2	2	8	2	2
4	2	4	4	4
8	2	4	8	8
16	2	4	8	16

Din tabelă rezultă că legea de compoziție $\circ$ este peste tot definită în mulțimea E , nu este asociativă pentru că nu este satisfăcută relația $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ pentru orice elemente x, y, z din E . De exemplu, există $x = 4, y = 2, z = 4$ pentru care $(4 \circ 2) \circ 4 = 8, 4 \circ (2 \circ 4) = 4$. Legea de compoziție $\circ$ nu este comutativă $[2 \circ 4 = 8, 4 \circ 2 = 2]$ și admite element neutru la stânga $e = 16$ ($16 \circ x = x$ pentru orice $x \in E$).

b) Pentru ecuația (1) se notează $x \circ 16 = y$, atunci $y \circ 8 = 4$. Din tabelă rezultă $y = 4$ și deci $x = 4$. Analog, pentru ecuația (2) se notează $2 \circ x = z$, de unde $8 \circ z = 2$. Folosind tabela se obține $z = 2$ și deci $2 \circ x = 2 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 8, x_3 = 16$.

XII. 4. În mulțimea $M = \{x \mid x \in (0, a), a \in (0, +\infty)\}$ se definește legea de compoziție $\circ$ astfel:

$$\forall x, y \in M, \quad x \circ y = \frac{x + y}{1 + \frac{xy}{a^2}}.$$

Să se arate că dubletul $(M, \circ)$ determină o structură de semigrup.

Rezolvare. Se verifică axiomele semigrupului:

1) Legea de compoziție $\circ$ este peste tot definită în mulțimea M :

$$\forall x, y \in M, \quad x \circ y = \frac{x + y}{1 + \frac{xy}{a^2}} \in M.$$

Într-adevăr, din $a - x > 0, a - y > 0$, rezultă $(a - x)(a - y) > 0 \Rightarrow a^2 + xy >$

$$> a(x + y) \Rightarrow \frac{x + y}{1 + \frac{xy}{a^2}} < a, \quad \forall x, y \in M.$$

2) Asociativitatea:

$$\forall x, y, z \in M, \quad (x \circ y) \circ z = \left(\frac{x + y}{1 + \frac{xy}{a^2}} \right) \circ z = \frac{\frac{a^2(x + y)}{a^2 + xy} + z}{1 + \frac{\frac{a^2(x + y)}{a^2 + xy} \cdot z}{a^2}} =$$

$$= \frac{a^2 \cdot (x + y + z) + xyz}{a^2 + xy + yz + zx} = x \circ (y \circ z).$$

Rezultă că dubletul $(M, \circ)$ formează un semigrup.

XII. 5. Fie $M = \{C_{\vec{k}}(\alpha) \mid \alpha \in [0, 2\pi], \vec{k} - \text{vector unitate fix}\}$ mulțimea rotațiilor spațiului în jurul unei axe fixe. Un element $C_{\vec{k}}(\alpha)$ al mulțimii M (o rotație) este caracterizat prin vectorul unitate $\vec{k}$ orientat după axa de rotație și unghiul α cu care se face rotația spațiului în jurul acestei axe de rotație (unghiul α se măsoară în sensul pozitiv în raport cu $\vec{k}$, conform regulii burghiului: rotația α este astfel încât burghiul să înainteze, prin rotire, în sensul lui $\vec{k}$).

În mulțimea M se definește legea de compoziție $+$ a rotațiilor, astfel:

$$\forall C_{\vec{k}}(\alpha), C_{\vec{k}}(\beta) \in M, C_{\vec{k}}(\alpha) + C_{\vec{k}}(\beta) = C_{\vec{k}}(\alpha + \beta)$$

(prin compunerea rotației $C_{\vec{k}}(\alpha)$ de unghi α cu rotația $C_{\vec{k}}(\beta)$ de unghi β se obține rotația $C_{\vec{k}}(\alpha + \beta)$ de unghi $\alpha + \beta$ în jurul axei fixe $\vec{k}$).

Să se arate că mulțimea $M = \{C_{\vec{k}}(\alpha) \mid \alpha \in [0, 2\pi], \vec{k} - \text{vector unitate fix}\}$ a rotațiilor spațiului în jurul unei axe fixe, înzestrată cu legea de compoziție $+$ a rotațiilor formează un grup abelian.

Rezolvare. Se verifică axiomele grupului:

1) Legea de compoziție $+$ este peste tot definită în M :

$$\forall C_{\vec{k}}(\alpha), C_{\vec{k}}(\beta) \in M, C_{\vec{k}}(\alpha) + C_{\vec{k}}(\beta) = C_{\vec{k}}(\alpha + \beta) \in M.$$

2) *Asociativitatea.* Fie $C_{\vec{k}}(\alpha), C_{\vec{k}}(\beta), C_{\vec{k}}(\gamma)$ trei rotații distincte ale spațiului în jurul axei fixe $\vec{k}$. Rezultă

$$[C_{\vec{k}}(\alpha) + C_{\vec{k}}(\beta)] + C_{\vec{k}}(\gamma) = C_{\vec{k}}(\alpha + \beta) + C_{\vec{k}}(\gamma) = C_{\vec{k}}(\alpha + \beta + \gamma),$$

$$C_{\vec{k}}(\alpha) + [C_{\vec{k}}(\beta) + C_{\vec{k}}(\gamma)] = C_{\vec{k}}(\alpha) + C_{\vec{k}}(\beta + \gamma) = C_{\vec{k}}(\alpha + \beta + \gamma).$$

3) Elementul neutru este rotația $C_{\vec{k}}(\theta)$ de unghi $\theta = 0$ în jurul axei $\vec{k}$:

$$C_{\vec{k}}(\theta) + C_{\vec{k}}(\alpha) = C_{\vec{k}}(\theta + \alpha) = C_{\vec{k}}(\alpha) \text{ și } C_{\vec{k}}(\alpha) + C_{\vec{k}}(\theta) = C_{\vec{k}}(\alpha).$$

4) Pentru orice rotație $C_{\vec{k}}(\alpha)$ există rotația inversă $C_{\vec{k}}(-\alpha)$, astfel încât $C_{\vec{k}}(\alpha) + C_{\vec{k}}(-\alpha) = C_{\vec{k}}(\alpha - \alpha) = C_{\vec{k}}(\theta)$.

5) Operația $+$ este comutativă, adică

$$C_{\vec{k}}(\alpha) + C_{\vec{k}}(\beta) = C_{\vec{k}}(\beta) + C_{\vec{k}}(\alpha) = C_{\vec{k}}(\alpha + \beta)$$

(rotația rezultantă se obține fie făcând mai întâi rotația de unghi α și apoi rotația de unghi β , fie făcând rotația de unghi β și apoi rotația de unghi α).

Observații: 1) Dubletul $(M, +)$ cu $M = \{C_{\vec{k}}(\alpha) \mid \alpha \in R, \vec{k} - \text{vector unitate fix}\}$ formează un grup ciclic deoarece $C_{\vec{k}}(\alpha + 2n\pi) = C_{\vec{k}}(\alpha), \forall n \in Z \text{ și } \alpha \in [0, 2\pi)$.

2) Dacă $C_{\vec{k}}(\alpha)$ reprezintă o rotație de unghi $\alpha = \frac{2\pi}{n}, n \in N$, în jurul axei $\vec{k}$, se spune că axa $\vec{k}$ este o axă de rotație de ordinul n și se notează C_n .

XII. 6. Să se arate că mulțimea $\mathcal{D}_n$ a rotațiilor care fac să coincidă o prismă n unghiulară regulată cu ea însăși formează un grup în raport cu legea de compunere $+$ a rotațiilor.

Rezolvare. Elementele mulțimii $\mathcal{D}_n$ sînt rotațiile care se fac în jurul următoarelor axe: C_n care unește centrele bazelor prisme și axele u_i , perpendiculare pe C_n , care unesc mijloacele muchiilor opuse și cele care unesc centrele fețelor opuse în cazul în care n este par, iar în cazul cînd n este impar, axele care unesc mijlocul unei muchii cu centrul feței opuse.

$$\text{Deci } \mathcal{D}_n = M_0 \cup \left(\bigcup_{i=1}^n M_i \right) \text{ cu } M_0 = \left\{ C_n(\alpha) \mid \alpha = \frac{2\pi}{n} \cdot p, p = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$$

și $M_i = \{u_i(\beta) \mid \beta = 0, \pi\}, i = 1, 2, \dots, n$ ($\mathcal{D}_n$ conține o axă de rotație de ordinul n și n axe de ordinul doi).

În problema precedentă am văzut că mulțimea rotațiilor spațiului în jurul unei axe fixe, înzestrată cu legea de compoziție $+$ a rotațiilor, formează un grup abelian. Deci mulțimile M_0 și $M_i (i = 1, 2, \dots, n)$ înzestrate cu legea de compoziție $+$ a rotațiilor sînt grupuri abeliene. Pentru a arăta că dubletul $(\mathcal{D}_n, +)$ formează un grup trebuie să mai arătăm că rotația obținută prin compunerea unei rotații în jurul axei C_n cu o rotație în jurul axei u_i aparține lui $\mathcal{D}_n$, adică suprapune prisma peste ea însăși, deoarece, așa cum s-a arătat la problema precedentă, celelalte axiome ale grupului sînt satisfăcute. Să presupunem că efectuăm rotația de unghi, $k \cdot \frac{2\pi}{n}, (k = 0, 1, \dots, n-1)$ în jurul axei

C_n și apoi rotația de unghi $k\pi (k = 0, 1)$ în jurul axei u_i ; după felul cum au fost alese aceste axe, în urma acestor rotații prisma se va suprapune peste ea însăși. Deci $(\mathcal{D}_n, +)$ este grup, iar $(M_0, +)$ și $(M_i, +) (i = 1, 2, \dots, n)$ sînt subgrupuri ale grupului $(\mathcal{D}_n, +)$.

XII. 7. Fie $R \times R$ mulțimea punctelor unui plan (P) care conține două drepte fixe perpendiculare $(D_1), (D_2)$ și care se intersectează în punctul O . În mulțimea $R \times R$ definim funcțiile $f_i : R \times R \rightarrow R \times R (i = 0, 1, 2, 3)$ astfel: $\forall M \in R \times R, f_0(M) = M, f_1(M)$ [respectiv $f_2(M)$] este simetricul punctului M față de dreapta (D_1) [respectiv (D_2)], $f_3(M)$ este simetricul punctului M față de punctul O .

a) Să se arate că mulțimea $F = \{f_j \mid f_j : R \times R \setminus (D_1) \cup (D_2) \rightarrow R \times R \setminus (D_1) \cup (D_2), j = 0, 1, 2, 3\}$ înzestrată cu legea de compunere obișnuită a funcțiilor, formează un grup comutativ.

b) Să se precizeze punctele din plan care sînt lăsate pe loc atunci cînd li se aplică funcțiile f_1, f_2, f_3 .

c) Fie $ABCD$ un dreptunghi cu centrul O și (d_1) , (d_2) două drepte perpendiculare în O și care trec respectiv prin mijlocul laturilor opuse. Se notează cu $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ mulțimea simetriilor dreptunghiului $ABCD$: s_0 este simetria identică ($A \rightarrow A, B \rightarrow B, C \rightarrow C, D \rightarrow D$), s_1 (respectiv s_2) este simetria față de dreapta (d_1) [respectiv (d_2)], iar s_3 este simetria față de punctul O . În mulțimea S se introduce legea de compoziție $\oplus$ astfel: a compune două simetrii înseamnă a le efectua una după alta.

Să se arate că dubletul $(S, \oplus)$ formează un grup abelian, izomorf cu grupul $(F, \circ)$.

Rezolvare. a) Din definiția funcțiilor $f_j: R \times R \setminus (D_1) \cup (D_2) \rightarrow R \times R \setminus (D_1) \cup (D_2)$, $j = 0, 1, 2, 3$, rezultă (fig. XII. 7.a):

$$f_0(M) = M, f_1(M) = M_1, f_2(M) = M_2, f_3(M) = M_3, (f_0 \circ f_1)(M) = f_0[f_1(M)] = f_0(M_1) = M_1 = f_1(M), (f_1 \circ f_2)(M) = f_1[f_2(M)] = f_1(M_2) = M_3 = f_3(M) \text{ etc.}$$

Se întocmește tabela:

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	f_0	f_3	f_2
f_2	f_2	f_3	f_0	f_1
f_3	f_3	f_2	f_1	f_0

Cu ajutorul tabelii se constată ușor că axiomele grupului sînt satisfăcute și deci dubletul $(F, \circ)$ este un grup comutativ.

b) Mulțimea punctelor $M \in R \times R$ pentru care $f_1(M) = M$ constituie dreapta (D_1) . Într-adevăr $\forall M \in (D_1)$ $f_1(M) = M$ și pentru orice $M \notin (D_1)$, $f_1(M) \notin (D_1)$.

Analog, mulțimea punctelor $M \in R \times R$ pentru care $f_2(M) = M$ formează dreapta (D_2) , iar mulțimea punctelor $M \in R \times R$ pentru care $f_3(M) = M$ este formată din punctul O .

c) Fie $ABCD$ dreptunghiul cu centrul în O și (d_1) , (d_2) două drepte perpendiculare în O și care trec respectiv prin mijlocul laturilor opuse (fig. XII.7.b).

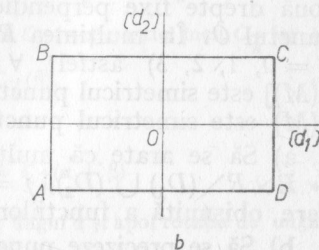
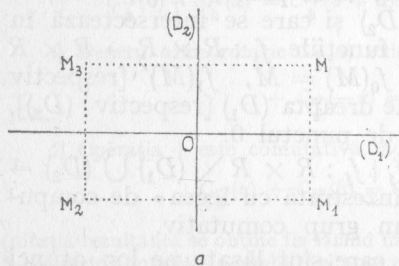


Fig. XII. 7.

Există următoarea tabelă de compunere a elementelor s a mulțimii S :

$\oplus$	s_0	s_1	s_2	s_3
s_0	s_0	s_1	s_2	s_3
s_1	s_1	s_0	s_3	s_2
s_2	s_2	s_3	s_0	s_1
s_3	s_3	s_2	s_1	s_0

Se verifică ușor că axiomele grupului sînt satisfăcute și deci dubletul $(S, \oplus)$ este un grup abelian.

Pentru a arăta că grupul $(S, \oplus)$ este izomorf cu grupul $(F, \circ)$ se introduce aplicația $\varphi: S \rightarrow T$ definită astfel:

$$\varphi(s_j) = f_j, j = 0, 1, 2, 3.$$

Aplicația φ astfel definită este surjectivă [$\forall s_j \in S, \exists f_j = \varphi(s_j) \in F$ și reciproc] și injectivă [$\forall s_i \neq s_j$ cu $s_i, s_j \in S, \exists f_i \neq f_j$ cu $f_i = \varphi(s_i) \in F, f_j = \varphi(s_j) \in F$] și deci φ este bijectivă. În plus

$$\varphi(s_i \oplus s_j) = \varphi(s_i) \circ \varphi(s_j) \in F, \forall s_i, s_j \in S.$$

[de exemplu: $\varphi(s_1 \oplus s_3) = \varphi(s_2) = f_2, \varphi(s_1) \circ \varphi(s_3) = f_1 \circ f_3 = f_2$].

Rezultă că grupul $(S, \oplus)$ este izomorf cu grupul $(F, \circ)$, izomorfismul fiind aplicația $\varphi: S \rightarrow T$ definită mai sus.

Observație. Grupurile $(F, \circ)$ și $(S, \oplus)$ sînt grupuri Klein.

XII. 8. Fie $(G, \cdot)$ un grup. Pentru fiecare element $a \in G$ se definește aplicația $f_a: G \rightarrow G$ prin

$$f_a(x) = ax, \forall x \in G.$$

a) Să se arate că aplicația f_a este bijectivă.

b) Se notează cu $F(G)$ mulțimea aplicațiilor bijective $f_a: G \rightarrow G$, adică

$$F(G) = \{f_a \mid f_a: G \rightarrow G, f_a(x) = ax, \forall a, x \in G\}.$$

Să se arate că mulțimea $F(G)$, înzestrată cu legea $\circ$ de compunere obișnuită a funcțiilor, formează un grup.

c) Să se arate că grupul $(G, \cdot)$ este izomorf cu grupul $(F(G), \circ)$ al aplicațiilor bijective.

Rezolvare. a) Aplicația f_a este surjectivă deoarece $\forall x \in G, f_a(x) = a \cdot x \in G$ și reciproc, $\forall y \in G, \exists x = \bar{a} \cdot y \in G$ astfel încît $f_a(\bar{a} \cdot y) = a \cdot (\bar{a} \cdot y) = ey = y$ [$\bar{a}$ este simetricul lui a în raport cu legea de compoziție din G , iar e elementul neutru din grupul $(G, \cdot)$].

Aplicația f_a este surjectivă: $\forall x_1 \neq x_2$ cu $x_1, x_2 \in G, f_a(x_1) \neq f_a(x_2)$ adică $ax_1 \neq ax_2$, ceea ce este evident dacă se înmulțește la stînga cu $\bar{a}$.

Rezultă că aplicația $f_a: G \rightarrow G$, $f_a(x) = a \cdot x$, $\forall a, x \in G$ este bijectivă.

b) Verificarea axiomelor grupului:

1) Legea de compunere $\circ$ a funcțiilor este peste tot definită în $F(G)$:

$$f_a, f_b \in F(G), (f_a \circ f_b)(x) = a \cdot b \cdot x = f_{ab}(x) \in F(G).$$

2) Asociativitatea. Fie $f_a, f_b, f_c \in F(G)$ elemente oarecare $((f_a \circ f_b) \circ f_c)(x) = a \cdot b \cdot c \cdot x = (f_a \circ (f_b \circ f_c))(x)$.

3) Element neutru: $\exists f_e \in F(G)$, astfel încît

$$(f_e \circ f_a)(x) = e \cdot a \cdot x = a \cdot e \cdot x = (f_a \circ f_e)(x) = f_a(x), \forall f_a \in F(G).$$

4) Elemente simetrice: $\forall f_a \in F(G)$, $\exists f_{\bar{a}} \in F(G)$ astfel încît

$$(f_a \circ f_{\bar{a}})(x) = a \cdot \bar{a} \cdot x = e \cdot x = f_e(x) = (f_{\bar{a}} \circ f_a)(x)$$

Deci $(F(G), \circ)$, este un grup.

c) Fie aplicația $\varphi: G \rightarrow F(G)$ definită astfel:

$$\varphi(a) = f_a, \forall a \in G.$$

Aplicația φ este surjectivă [$\forall a \in G$, $\varphi(a) = f_a \in F(G)$] și reciproc, $\varphi(a) = f_a \in F(G) \Rightarrow a \in G$ și injectivă [$\forall a \neq b$, $a, b \in G$, $\varphi(a) \neq \varphi(b)$] cu $\varphi(a) = f_a \in F(G)$ și $\varphi(b) = f_b \in F(G)$, deci φ este bijectivă. În plus

$$\forall a, b \in G, \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \circ \varphi(b).$$

Într-adevăr, din definiția aplicației $\varphi: G \rightarrow F(G)$ rezultă

$$\varphi(a \cdot b) = f_{a \cdot b} = f_a \circ f_b = \varphi(a) \circ \varphi(b), \forall a, b \in G.$$

Deci grupul $(G, \cdot)$ este izomorf cu grupul aplicațiilor bijective $(F(G), \circ)$.

XII. 9. Fie $(R, +, \cdot)$ corpul numerelor reale. În mulțimea $R^3 = R \times R \times R$ se introduc două legi de compoziție $\oplus$ și $\odot$ difinite astfel:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1, z_1) \oplus (x_2, y_2, z_2) &= \\ &= (x_1 + x_2 e^{az_1}, y_1 + y_2 e^{bz_1}, z_1 + z_2), \\ \forall (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in R^3; \\ (x_1, y_1, z_1) \odot (x_2, y_2, z_2) &= \\ &= (x_1 x_2, y_1 z_2 + y_2 z_1, y_1 y_2 + z_1 z_2) \end{aligned}$$

cu a, b — constante reale.

a) Să se cerceteze dacă tripletul $(R^3, \oplus, \odot)$ este un inel.

b) Fie $M^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in R, x \neq 0 \text{ și } y^2 - z^2 \neq 0\}$.

Să se arate că dubletul $(M^3, \odot)$ este un grup.

Rezolvare. a) Verificăm axiomele inelului.

I. Dubletul $(R^3, \oplus)$ este un grup.

1) Legea de compoziție $\oplus$ este peste tot definită în R^3 :

$$\forall (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in R^3, (x_1, y_1, z_1) \oplus (x_2, y_2, z_2) =$$

$$= (x_1 + x_2 e^{az_1}, y_1 + y_2 e^{bz_1}, z_1 + z_2) \in R^3$$

2) Asociativitatea. Fie $(x_i, y_i, z_i) \in R^3$ ($i = 1, 2, 3$) elemente oarecare; rezultă

$$\begin{aligned} [(x_1, y_1, z_1) \oplus (x_2, y_2, z_2)] \oplus (x_3, y_3, z_3) &= (x_1 + x_2 e^{az_1} + x_3 e^{a(z_1+z_2)}, y_1 + y_2 e^{bz_1} + \\ &+ y_3 e^{b(z_1+z_2)}, z_1 + z_2 + z_3) = (x_1, y_1, z_1) \oplus [(x_2, y_2, z_2) \oplus (x_3, y_3, z_3)]. \end{aligned}$$

3) Element neutru.

$$(x, y, z) \oplus (\alpha, \beta, \gamma) = (x, y, z) \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0) \in R^3$$

$$(\alpha', \beta', \gamma') \oplus (x, y, z) = (x, y, z) \Rightarrow (\alpha', \beta', \gamma') = (0, 0, 0) \in R^3, \forall (x, y, z) \in R^3.$$

4) Elemente simetrice:

$$(x, y, z) \oplus (\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) = (0, 0, 0) \Rightarrow (\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) = (-x e^{-az}, -y e^{-bz}, -z) \in R^3,$$

$$(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \oplus (x, y, z) = (0, 0, 0) \Rightarrow (\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) = (-x e^{-az}, -y e^{-bz}, -z) \in R^3,$$

$$\forall (x, y, z) \in R^3.$$

5) Comutativitatea nu are loc:

$$(x_1, y_1, z_1) \oplus (x_2, y_2, z_2) \neq (x_2, y_2, z_2) \oplus (x_1, y_1, z_1)$$

II. Dubletul $(R^3, \odot)$ este un semigrup.

$$1) \forall (x_i, y_i, z_i) \in R^3 (i = 1, 2), (x_1, y_1, z_1) \odot (x_2, y_2, z_2) =$$

$$= (x_1 x_2, y_1 z_2 + y_2 z_1, y_1 y_2 + z_1 z_2) \in R^3.$$

2) Asociativitatea. Fie $(x_k, y_k, z_k) \in R^3$ ($k = 1, 2, 3$) elemente oarecare; rezultă

$$\begin{aligned} [(x_1, y_1, z_1) \odot (x_2, y_2, z_2)] \odot (x_3, y_3, z_3) &= (x_1 x_2 x_3, y_1 y_2 y_3 + y_1 z_2 z_3 + y_2 z_1 z_3 + y_3 z_1 z_2, \\ &+ y_1 y_2 z_3 + y_1 y_3 z_2 + y_2 y_3 z_1 + z_1 z_2 z_3) = (x_1, y_1, z_1) \odot [(x_2, y_2, z_2) \odot (x_3, y_3, z_3)] \end{aligned}$$

3) Element neutru:

$$(x, y, z) \odot (\delta, \varepsilon, \lambda) = (x, y, z) \Rightarrow (\delta, \varepsilon, \lambda) = (1, 0, 1) \in R^3,$$

$$(\delta', \varepsilon', \lambda') \odot (x, y, z) = (x, y, z) \Rightarrow (\delta', \varepsilon', \lambda') = (1, 0, 1) \in R^3, \forall (x, y, z) \in R^3.$$

III. Distributivitatea legii de compoziție $\odot$ față de legea $\oplus$: $\forall (x_i, y_i, z_i) \in R^3$, $i = 1, 2, 3$; se obține

$$(x_1, y_1, z_1) \odot [(x_2, y_2, z_2) \oplus (x_3, y_3, z_3)] = (x_1 x_2 + x_1 x_3 e^{az_2}, y_1 z_2 + y_1 z_3 + y_2 z_1 + y_3 z_1 e^{bz_2},$$

$$y_1 y_2 + y_1 y_3 e^{bz_2} + z_1 z_2 + z_1 z_3).$$

$$[(x_1, y_1, z_1) \odot (x_2, y_2, z_2)] \oplus [(x_1, y_1, z_1) \odot (x_3, y_3, z_3)] = (x_1 x_2 + x_1 x_3 e^{a(y_1 y_2 + z_1 z_2)},$$

$$y_1 z_2 + y_2 z_1 + (y_1 z_3 + y_3 z_1) e^{b(y_1 y_2 + z_1 z_2)}, y_1 y_2 + z_1 z_2 + y_1 y_3 + z_1 z_3).$$

Se observă că legea de compoziție $\odot$ nu este distributivă față de legea $\oplus$ și deci tripletul $(R^3, \oplus, \odot)$ un formează un inel

b) S-a arătat că dubletul $(R^3, \odot)$ este un semigrup cu element unitate. Pentru a arăta că $(M^3, \odot)$ este un grup trebuie să se verifice existența elementelor simetrice:

$$(x, y, z) \odot (\widetilde{x}, y, z) = (1, 0, 1) \Rightarrow (\widetilde{x}, y, z) = \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{y^2 - z^2}, -\frac{z}{y^2 - z^2} \right) \in M^3,$$

$$(\widetilde{x}, y, z) \odot (x, y, z) = (1, 0, 1) \Rightarrow (\widetilde{x}, y, z) = \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{y^2 - z^2}, -\frac{z}{y^2 - z^2} \right) \in M^3,$$

$\forall (x, y, z) \in M^3$.

Deci $(M^3, \odot)$ este un grup comutativ (operația $\odot$ fiind comutativă).

XII. 10. a) Să se arate că mulțimea matricelor pătrate M_2 de forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ cu } a, b, c, d \text{ numere reale, înzestrată cu operațiile de adunare}$$

(+) și de înmulțire ($\cdot$) a matricelor, formează un inel necomutativ.

b) Să se precizeze mulțimea divizorilor lui zero pentru inelul $(M_2, +, \cdot)$.

c) Să se rezolve în $(M_2, +, \cdot)$ sistemul:

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ BX + AY = C \end{cases}; A, B, C, X, Y \in M_2.$$

Rezolvare. a) Fie maricele:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix}, a_i, b_i, c_i, d_i \in R$$

($i = 1, 2, 3$)

elemente oarecare din M_2 . Să se arate că tripletul $(M_2, +, \cdot)$ satisface axiomele inelului.

I. Dubletul $(M_2, +)$ formează un grup comutativ.

$$1) \forall A, B \in M_2, A + B = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \in M_2$$

2) Asociativitatea operației + :

$$(A + B) + C = A + (B + C), \forall A, B, C \in M_2.$$

3) Există elementul neutru față de operația + :

$$O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ astfel că } A + O_2 = O_2 + A = A, \forall A \in M_2.$$

4) Fiecărui element $A \in M_2$ îi corespunde opusul

$$-A = \begin{bmatrix} -a_1 & -b_1 \\ -c_1 & -d_1 \end{bmatrix} \text{ astfel că } A + (-A) = (-A) + A = O_2.$$

5) Comutativitatea operației + : $A + B = B + A, \forall A, B \in M_2$.

II. Dubletul $(M_2, \cdot)$ formează un semigrup.

$$1) \forall A, B \in M_2, A \cdot B = \begin{bmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{bmatrix} \in M_2.$$

2) Asociativitatea operației $\cdot$: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C), \forall A, B, C \in M_2$.

3) Există elementul neutru față de operația $\cdot$: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ astfel încât $I \cdot A = A \cdot I = A, \forall A \in M_2$.

4) Operația $\cdot$ este necomutativă.

III. Distributivitatea bilaterală a înmulțirii față de adunare: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ și $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C, \forall A, B, C \in M_2$.

Rezultă că tripletul $(M_2, +, \cdot)$ este un inel necomutativ.

b) Matricele $X, Y \in M_2$ sînt divizori ai lui zero dacă $X \cdot Y = O_2, X \neq O_2$ și $Y \neq O_2$; X este divizor al lui zero la stînga, iar Y este divizor al lui zero la dreapta.

Fie $A \in M_2, A \neq O_2, A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, a, b, c, d \in R$ și $Y = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \neq O_2$ un divizor al lui zero la dreapta, adică $A \cdot Y = O_2$. Se obține

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = O_2 \Rightarrow \begin{cases} ax + bz = 0 \\ cx + dz = 0 \end{cases} \quad (1) \text{ și } \begin{cases} ay + bt = 0 \\ cy + dt = 0 \end{cases} \quad (2)$$

1) Dacă $\det A = \det (1) = \det (2) \neq 0$, atunci $Y = O_2$.

2) Dacă $\det A = 0, A \neq O_2$ atunci cel puțin unul din numerele a, b, c, d este diferit de zero. Presupunînd $a \neq 0$, din (1) și (2) rezultă

$$\begin{cases} x = -\frac{b}{a} z, \\ z = m, m \in R - \text{un parametru}, \end{cases} \quad (1'); \quad \begin{cases} y = -\frac{b}{a} t, \\ t = n, n \in R - \text{un parametru} \end{cases} \quad (2')$$

Deci mulțimea divizorilor lui zero la dreapta, pentru matricea $A \in M_2$ este:

$$D_A = \begin{cases} \Phi, \text{ dacă } A \text{ este nesingulară,} \\ \left\{ X \in M_2 \setminus \{O_2\} \mid X = \begin{bmatrix} -\frac{b}{a} m & -\frac{b}{a} n \\ m & n \end{bmatrix}, a \neq 0, m, n - \text{parametri} \right\}, \\ \text{dacă } A \text{ este singulară.} \end{cases}$$

Analog se arată că mulțimea divizorilor lui zero la stînga, pentru matricea A este:

$$S_A = \begin{cases} \Phi, \text{ dacă } A \text{ este nesingulară,} \\ \left\{ X \in M_2 \setminus \{O_2\} \mid X = \begin{bmatrix} -\frac{c}{a} m_1 & m_1 \\ -\frac{c}{a} n_1 & n_1 \end{bmatrix}, a \neq 0, m_1, n_1 - \text{parametri} \right\}, \\ \text{dacă } A \text{ este singulară.} \end{cases}$$

Scăzând ecuațiile membru cu membru, sistemul se scrie:

$$(A - B)(X - Y) = O_2.$$

1) $A - B$ nesingulară $\Rightarrow X - Y = O_2 \Rightarrow X = Y \Rightarrow (A + B)X = C$.

a₁) $A + B$ nesingulară: $X = Y = (A + B)^{-1} \cdot C$,

b₁) $A + B$ singulară. Fie $A + B = \begin{bmatrix} a_1^* & b_1^* \\ c_1^* & d_1^* \end{bmatrix}$ și $C = \begin{bmatrix} a_2^* & b_2^* \\ c_2^* & d_2^* \end{bmatrix}$.

Dacă $c_1^*, d_1^*, c_2^*, d_2^* \neq 0$, ecuația $(A + B)X = C$ are soluție numai dacă matricele

$(A + B)$ și C sînt de forma $\begin{bmatrix} c_1^*k & d_1^*k \\ c_2^* & d_2^* \end{bmatrix}$;

$$\begin{bmatrix} c_1^*k & d_1^*k \\ c_1^* & d_1^* \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} c_2^*k & d_2^*k \\ c_2^* & d_2^* \end{bmatrix}.$$

Dar

$$\begin{bmatrix} c_2^*k & d_2^*k \\ c_2^* & d_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^*k & d_1^*k \\ c_1^* & d_1^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{c_2^*}{c_1^*} & 0 \\ 0 & \frac{d_2^*}{d_1^*} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} c_1^*k & d_1^*k \\ c_1^* & d_1^* \end{bmatrix} \cdot \left(X - \begin{bmatrix} \frac{c_2^*}{c_1^*} & 0 \\ 0 & \frac{d_2^*}{d_1^*} \end{bmatrix} \right) = O_2 \Rightarrow X = D_{A+B} + \begin{bmatrix} \frac{c_2^*}{c_1^*} & 0 \\ 0 & \frac{d_2^*}{d_1^*} \end{bmatrix}.$$

2) $A - B$ singulară: $X - Y = D_{A-B} \Rightarrow AX + B(X - D_{A-B}) = C \Rightarrow (A + B)X = C + BD_{A-B}$, care se rezolvă ca a₁) și b₁).

XII. 11. Fie $(M_2, +, \cdot)$ inelul comutativ al matricelor pătrate de forma $M_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ bc & a \end{bmatrix}$, unde $a, b \in Q$, iar c un număr natural care nu conține ca factori pătrate perfecte, și $(Q(\sqrt{c}), +, \cdot)$ inelul comutativ al numerelor pătratice reale de forma $a + b\sqrt{c}$, cu $a, b \in Q$ (c un număr natural care nu conține ca factori pătrate perfecte).

Să se arate că aplicația $f: M_2 \rightarrow Q(\sqrt{c})$ definită prin $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ bc & a \end{bmatrix}\right) = a + b\sqrt{c}$ este un izomorfism al inelelor $(M_2, +, \cdot)$, $(Q(\sqrt{c}), +, \cdot)$.

Rezolvare. Din definiție rezultă

$$\forall \begin{bmatrix} a & b \\ bc & a \end{bmatrix} \in M_2, \quad f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ bc & a \end{bmatrix}\right) = a + b\sqrt{c} \in Q(\sqrt{c}).$$

adică f este surjecție.

Fie

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1c & a_1 \end{bmatrix} \in M_2 \text{ și } \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2c & a_2 \end{bmatrix} \in M_2 \text{ astfel ca } \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1c & a_1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2c & a_2 \end{bmatrix}, \text{ adică } a_1 \neq a_2 \text{ sau}$$

$b_1 \neq b_2 \Rightarrow a_1 + b_1\sqrt{c} \neq a_2 + b_2\sqrt{c}$ și prin urmare f este injecție. Deci f este bijecție.

Se arate că f păstrează operațiile:

$$\forall \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ b_ic & a_i \end{bmatrix} \in M_2 \quad (i = 1, 2), \quad f\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1c & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2c & a_2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ (b_1 + b_2)c & a_1 + a_2 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{c} = (a_1 + b_1\sqrt{c}) + (a_2 + b_2\sqrt{c}) = f\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1c & a_1 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2c & a_2 \end{bmatrix}\right)$$

și $f\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1c & a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2c & a_2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1b_2c & a_1b_2 + b_1a_2 \\ (a_1b_2 + b_1a_2)c & a_1a_2 + b_1b_2c \end{bmatrix}\right) = (a_1a_2 + b_1b_2c) +$

$+(a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{c} = (a_1 + b_1\sqrt{c}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{c}) = f\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1c & a_1 \end{bmatrix}\right) \cdot f\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2c & a_2 \end{bmatrix}\right).$

Rezultă că f este un izomorfism al inelelor $(M_2, +, \cdot)$, $(Q(\sqrt{c}), +, \cdot)$.

XII. 12. În mulțimea $M = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ se definesc legile de compoziție $\oplus, \odot$ astfel:

$$\forall x, y \in M; \quad x \oplus y = \arctg(\tg x + \tg y),$$

$$x \odot y = \arctg(k \cdot \tg x \cdot \tg y), \quad k \in R \setminus \{0\} \text{ fixat.}$$

Să se arate că tripletul $(M, +, \cdot)$ formează un corp comutativ.

Rezolvare. Verificarea axiomelor corpului:

1. Dubletul $(M, \oplus)$ este un grup abelian.

$$1) \quad \forall x, y \in M, \quad x \oplus y = \arctg(\tg x + \tg y) \in M.$$

2) Asociativitatea:

$$\forall x, y, z \in M, \quad (x \oplus y) \oplus z = \arctg(\tg(x \oplus y) + \tg z) = x \oplus (y \oplus z)$$

3) Element neutru:

$$\exists \theta = 0 \in M, \text{ astfel ca, } \forall x \in M, \quad 0 \oplus x = \arctg(\tg 0 + \tg x) = x$$

4 Elemente simetrice:

$$\forall x \in M, \exists \tilde{x} = -x \in M, (-x) \oplus x = \arctg(\operatorname{tg}(-x) + \operatorname{tg} x) = 0.$$

5) Comutativitatea:

$$\forall x, y \in M, x \oplus y = \arctg(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y) = \arctg(\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} x) = y \oplus x.$$

II. Dubletul $(M \setminus \{0\}, \odot)$ formează un grup abelian.

$$1) \forall x, y \in M \setminus \{0\}, x \odot y = \arctg(k \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y) \in M \setminus \{0\}.$$

2) Asociativitatea:

$$(x \odot y) \odot z = \arctg[k \cdot \operatorname{tg}(\arctg(k \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y) \cdot \operatorname{tg} z)] = \\ = \arctg(k^2 \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z).$$

$$\forall x, y, z \in M \setminus \{0\}; \quad x \odot (y \odot z) = \arctg[k \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}(\arctg(k \cdot \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z))] = \\ = \arctg(k^2 \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z).$$

3) Element neutru:

$$\exists e \in M \setminus \{0\}, \forall x \in M \setminus \{0\}, e \odot x = x \Rightarrow e = \arctg \frac{1}{k}.$$

4) Elemente simetrice:

$$\forall x \in M \setminus \{0\}, \exists \tilde{x} \in M \setminus \{0\}, x \odot \tilde{x} = e \Rightarrow \tilde{x} = \arctg \frac{1}{k^2 \operatorname{tg} x}.$$

5) Comutativitatea:

$$\forall x, y \in M \setminus \{0\}, x \odot y = \arctg(k \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y) = \arctg(k \cdot \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} x) = y \odot x.$$

III. Distributivitatea bilaterală a legii de compoziție $\odot$ față de legea de compoziție $\oplus$: $\forall x, y, z \in M$ rezultă

$$x \odot (y \oplus z) = x \odot (\arctg(\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z)) = \arctg(k \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + k \operatorname{tg} x \operatorname{tg} z) = \\ = (x \odot y) \oplus (x \odot z);$$

$$(x \oplus y) \odot z = (\arctg(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)) \odot z = \arctg(k \operatorname{tg} x \operatorname{tg} z + k \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z) = \\ = (x \odot z) \oplus (y \odot z).$$

Deci tripletul $(M, \oplus, \odot)$ formează un corp comutativ.

XII. 13. Fie $(R, +, \cdot)$ corpul numerelor reale și mulțimile

$$M_2 = \left\{ M(a, b) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in R \right\}, \quad P_2 = \left\{ P(c, d) = \begin{bmatrix} c & -5d \\ d & 3d+c \end{bmatrix} \mid c, d \in R \right\}$$

a) Să se arate că $(M_2, +, \cdot)$ și $(P_2, +, \cdot)$ sunt corpuri (aici $+$ și $\cdot$ sunt operațiile obișnuite de adunare și înmulțire a matricelor).

b) Corpul $(M_2, +, \cdot)$ este izomorf cu corpul $(C, +, \cdot)$ al numerelor complexe.

c) Orice matrice $M(a, b) \in M_2$ se poate reprezenta sub forma $M(a, b) = aI + bJ$ unde $J^2 = -I$ (I este matricea unitate) și orice matrice $P(c, d) \in P_2$ se poate reprezenta sub forma $P(c, d) = cI + dV$, unde V satisface egalitatea $V^2 = 3V - 5I$.

d) Să se determine izomorfismele $f: P_2 \rightarrow M_2$ de forma $f[P(c, d)] = pI + \tilde{p}I + qJ$ și inversele acestora și apoi un izomorfism $h: P_2 \rightarrow C$.

e) Folosind rezultatul de la punctul b) să se calculeze A^n , unde

$$A = \begin{bmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{bmatrix}.$$

Rezolvare. a) Se verifică axiomele corpului.

I. Se știe că mulțimea matricelor pătrate de ordinul 2 formează un grup comutativ în raport cu legea de compoziție $+$ (adunarea obișnuită a matricelor). Deci $(M_2, +)$

și $(P_2, +)$ sunt grupuri comutative cu $O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ elementul neutru.

II. Mulțimea $M_2 \setminus \{O_2\}$ (respectiv $P_2 \setminus \{O_2\}$) formează un grup în raport cu legea de compoziție $\cdot$ (înmulțirea obișnuită a matricelor); elementul neutru este $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ iar elementele simetrice sunt

$$M^{-1}(a, b) = \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \text{ și respectiv } P^{-1}(c, d) = \frac{1}{c^2 + 3dc + 5d^2} \cdot \begin{bmatrix} 3d+c & 5d \\ -d & c \end{bmatrix}.$$

Se verifică ușor că operația $\cdot$ este comutativă.

III. Distributivitatea bilaterală a înmulțirii față de adunare: $\forall M(a_i, b_i) \in M_2 (i = 1, 2, 3)$ se obține $M(a_1, b_1) \cdot [M(a_2, b_2) + M(a_3, b_3)] = [M(a_1, b_1) \cdot M(a_2, b_2)] + [M(a_1, b_1) \cdot M(a_3, b_3)]$;

$$[M(a_1, b_1) + M(a_2, b_2)] \cdot M(a_3, b_3) = [M(a_1, b_1) \cdot M(a_3, b_3)] + [M(a_2, b_2) \cdot M(a_3, b_3)].$$

Analog și pentru P_2 .

Rezultă că $(M_2, +, \cdot)$ și $(P_2, +, \cdot)$ sunt corpuri comutative.

b) Fie aplicația $\varphi: M_2 \rightarrow C$ definită prin $\varphi[M(a, b)] = a + ib, \forall M(a, b) \in M_2$. Aplicația φ astfel definită este surjectivă ($\forall (a, b) \in M_2 \Rightarrow \varphi[M(a, b)] = a + ib \in C$ și reciproc) și injectivă ($\forall M(a_1, b_1) \neq M(a_2, b_2)$ cu $M(a_1, b_1), M(a_2, b_2) \in M_2 \Rightarrow M(a_1, b_1) \neq \varphi[M(a_2, b_2)]$ cu $\varphi[M(a_1, b_1)], \varphi[M(a_2, b_2)] \in C$), deci φ este bijectivă.

φ , păstrează operațiile: $\varphi[M(a_1, b_1) + M(a_2, b_2)] = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2) = \varphi[M(a_1, b_1)] + \varphi[M(a_2, b_2)]$; $\varphi[M(a_1, b_1) \cdot M(a_2, b_2)] = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = \varphi[M(a_1, b_1)] \cdot \varphi[M(a_2, b_2)]$.

Deci aplicația $\varphi: M_2 \rightarrow C$ definită prin $\varphi[M(a, b)] = a + ib$, $\forall M(a, b) \in M_2$ este un izomorfism între corpurile $(M_2, +, \cdot)$ și $(C, +, \cdot)$.

c)

$$M(a, b) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = a \cdot I + bJ \text{ unde}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ și } J^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I.$$

Analog

$$P(c, d) = \begin{bmatrix} c & -5d \\ d & 3d + c \end{bmatrix} = c \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dacă $V = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ atunci are loc egalitatea: $V^2 = 3V - 5I$ și $P(c, d) = c \cdot I + d \cdot V$.

d) Pentru ca f să fie un izomorfism de corpuri, trebuie ca

$$f(P(c, d) + P(c, d)) = f(P(c, d)) + f(P(c, d)), \quad \forall P(c, d) \in P_2, \quad (1)$$

$$f(P(c, d) \cdot P(c, d)) = f(P(c, d)) \cdot f(P(c, d)), \quad \forall P(c, d) \in P_2. \quad (2)$$

Pentru $c = 0, d = 1$ rezultă $P(0, 1) = V$ și (2) devine:

$$f(V^2) = f^2(V),$$

sau înlocuind $V^2 = 3V - 5I$ și folosind (1):

$$f(3V - 5I) = f^2(V) \Rightarrow f(3V) + f(-5I) = f^2(V)$$

adică

$$3(pI + qJ) - 5I = (pI + qJ)^2$$

de unde

$$\begin{cases} 3p - 5 = p^2 - q^2 \\ 3q = 2pq \end{cases} \Rightarrow p = \frac{3}{2}, \quad q = \frac{\sqrt{11}}{2}; \quad p = \frac{3}{2}, \quad q = -\frac{\sqrt{11}}{2}.$$

$$\text{Pentru } p = \frac{3}{2}, \quad q = \frac{\sqrt{11}}{2} \text{ avem } f(V) = \frac{3}{2}I + \frac{\sqrt{11}}{2}J \text{ și } f: P_2 \rightarrow M_2, \quad f(P(c, d)) =$$

$$= \left(c + \frac{3}{2}d\right)I + \frac{\sqrt{11}}{2}dJ. \quad (3)$$

$$\text{Pentru } p = \frac{3}{2}, \quad q = -\frac{\sqrt{11}}{2}, \text{ rezultă } f(V) = \frac{3}{2}I - \frac{\sqrt{11}}{2}J \text{ și}$$

$$f: P_2 \rightarrow M_2, \quad f(P(c, d)) = \left(c + \frac{3}{2}d\right)I - \frac{\sqrt{11}}{2}dJ. \quad (4)$$

Se constată ușor că aplicațiile (3) și (4) sînt bijective și deci ele reprezintă izomorfisme între corpurile $(P_2, +, \cdot)$ și $(M_2, +, \cdot)$.

Dar $(M_2, +, \cdot)$ este un corp izomorf cu corpul numerelor complexe $(C, +, \cdot)$, izomorfismul fiind $\varphi: M_2 \rightarrow C$ definit la punctul b). Rezultă că corpul $(P_2, +, \cdot)$ este izomorf cu corpul $(C, +, \cdot)$ și izomorfismul este:

$$h: P_2 \rightarrow C, \quad h(P(c, d)) = c + \frac{3}{2}d + i \frac{\sqrt{11}}{2}d \quad (5)$$

sau

$$h: P_2 \rightarrow C, \quad h(P(c, d)) = c + \frac{3}{2}d - i \frac{\sqrt{11}}{2}d. \quad (6)$$

Aplicațiile inverse aplicațiilor (3), (4) se obțin făcînd

$$\begin{cases} c + \frac{3}{2}d = a \\ \pm \frac{\sqrt{11}}{2}d = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = a \mp \frac{3b}{\sqrt{11}}, \\ d = \pm \frac{2b}{\sqrt{11}}. \end{cases}$$

Rezultă:

$$f^{-1}: M_2 \rightarrow P_2, \quad f^{-1}(M(a, b)) = P\left(a - \frac{3b}{\sqrt{11}}, \frac{2b}{\sqrt{11}}\right), \quad (7)$$

sau

$$f^{-1}: M_2 \rightarrow P_2, \quad f^{-1}(M(a, b)) = P\left(a + \frac{3b}{\sqrt{11}}, -\frac{2b}{\sqrt{11}}\right). \quad (8)$$

e) Deoarece $A \in M_2$ și $(M_2, +, \cdot)$ este izomorf cu $(C, +, \cdot)$.

$$\varphi(A) = \varphi(M(\cos a, -\sin a)) = \cos a - i \sin a$$

și

$$\varphi(A^n) = \varphi(M^n(\cos a, -\sin a)) = (\cos a - i \sin a)^n = \cos(-a) + i \sin(-a) = \cos na - i \sin na = \varphi(M(\cos na, -\sin na)),$$

de unde

$$M^n(\cos a, -\sin a) = M(\cos na, -\sin na)$$

adică

$$\left(\begin{bmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{bmatrix}\right)^n = \begin{bmatrix} \cos na & \sin na \\ -\sin na & \cos na \end{bmatrix}.$$

PROBLEME PROPUSE

XII. 1. Fie mulțimea $R^+ = [0, +\infty)$ înzestrată cu legea de compoziție internă $\circ$ definită prin relația $a \circ b = \sqrt{ab}$. Să se arate că legea de compoziție $\circ$ are proprietățile:

- este comutativă;
- nu este asociativă;
- este distributivă la stînga și la dreapta pentru ea însăși.

XII. 2. Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție internă $\perp$ și $\top$ astfel:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2; \quad \begin{aligned} a \perp b &= 3a + 3b + 5ab + 2 \\ a \top b &= 2a + 2b + 2ab + 1. \end{aligned}$$

a) Să se cerceteze dacă legile de compoziție $\perp$ și $\top$ sînt asociative și admit element neutru.

b) Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} (x + y) \perp 4 = 60, \\ (x - y) \top 3 = 39. \end{cases}$$

XII. 3. În mulțimea numerelor reale este definită legea de compoziție internă $\circ$ prin: $x \circ y = axy + b(x + y) + c$, unde a, b, c sînt numere reale astfel că $a \cdot b \neq 0$.

a) Ce relație trebuie să satisfacă numerele a, b, c ca legea să fie asociativă?

b) Relația obținută fiind satisfăcută, să se arate că legea admite un element neutru e și că orice număr real, exceptînd unul singur, care trebuie precizat, admite un simetric.

XII. 4. Se înzestrează mulțimea de 4 elemente $E = \{1, 2, 3, 4\}$ cu legea de compoziție internă $\circ$ definită astfel: $a \circ b = c$ dacă și numai dacă c este restul împărțirii lui a^b prin 5.

a) Să se construiască tabela acestei legi. Este comutativă legea de compoziție?

b) Să se folosească tabela pentru calculul numerelor $(a \circ b) \circ c$ și $a \circ (b \circ c)$ în fiecare din următoarele cazuri: $a = b = c = 2$; $a = b = c = 3$, $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$.

XII. 5. În mulțimea Q a numerelor raționale se dau două legi de compoziție notate $\perp$, $\top$ și definite astfel:

$$\forall x, y \in Q; \quad \begin{aligned} x \perp y &= \frac{1}{4}xy - 2x - 2y + 24 \\ x \top y &= x + y + 2. \end{aligned}$$

a) Să se arate că legea de compoziție $\perp$ este asociativă.

b) Să se determine mulțimea $Q \setminus \{\alpha\}$ pentru care există element neutru și elemente simetrice în raport cu legea de compoziție $\perp$.

c) Să se arate că legea de compoziție $\perp$ nu este distributivă în raport cu legea de compoziție $\top$.

d) Să se rezolve în $(Q \setminus \{8\}) \times (Q \setminus \{8\})$ sistemul

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} \perp \frac{1}{y+1} &= \frac{29}{12} e \\ \frac{1}{x-1} \top \frac{1}{y+1} &= e' \end{aligned} \quad x \neq 1, y \neq -1$$

unde e reprezintă elementul neutru față de legea de compoziție $\perp$, iar e' elementul neutru față de legea de compoziție $\top$.

XII. 6. În corpul numerelor reale R cu cele două legi de compoziție obișnuite de adunare și înmulțire, se definește legea de compoziție internă $\circ$ astfel:

$$\forall x, y \in R, x \circ y = x \cos^2 \alpha + y \cos^2 \beta,$$

cu α și β măsurile în radiani a două unghiuri ale unui triunghi.

a) Să se arate că dacă $(x \circ y) + z = (x + z) \circ (y + z)$

pentru orice $x, y, z \in R$, atunci $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ sau $|\alpha - \beta| = \frac{\pi}{2}$.

b) Ce structură determină legea de compoziție $\circ$ pe mulțimea numerelor reale?

XII. 7. În corpul numerelor reale $(R, +, \cdot)$ se definește următoarea lege de compoziție internă:

$$\forall x, y \in R, x \circ y = \log_a(a^x + a^y) \quad \text{cu } a > 0, a \neq 1.$$

a) Să se rezolve ecuația

$$a^{(\log_a |x| + a)} \circ (\log_a |x| + 2a) = |x - 3a|.$$

b) Ce structură determină legea de compoziție $\circ$ pe mulțimea numerelor reale?

XII. 8. Se dau legile de compoziție:

$$x \top y = \arcsin(\sin x \cdot \sin y), \quad \forall x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$x \perp y = \arccos(\cos x \cdot \cos y), \quad \forall x, y \in [0, \pi].$$

a) Să se arate că:

$$- \text{dacă } x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \text{ atunci } x \top y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$- \text{dacă } x, y \in [0, \pi], \text{ atunci } x \perp y \in [0, \pi].$$

b) Să se determine mulțimile $A = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{\alpha\}$ și $B = [0, \pi] \setminus \{\beta\}$ astfel ca $(A, \top)$ și $(B, \perp)$ să fie semigrupuri cu element unitate.

XII. 9. Pe corpul numerelor reale $(R, +, \cdot)$ se definește legea de compoziție internă $\circ$ astfel:

$$\forall x, y \in R, x \circ y = \sqrt[n+1]{ax^{2n+1}y^{2n+1} + bx^{2n+1} + by^{2n+1} + c}$$

unde $n \in N$, iar a, b, c sînt parametri reali.

Să se studieze structura $(R, \circ)$ și să se determine mulțimea $M = R \setminus \{\alpha\}$ astfel ca dubletul $(M, \circ)$ să formeze un grup.

XII. 10. În corpul numerelor complexe cu cele două legi de compoziție obișnuite de adunare și de înmulțire, se definește legea de compoziție internă $\circ$ astfel:

$$\forall z_1, z_2 \in C, z_1 \circ z_2 = z_1 \cdot z_2 + i(z_1 + z_2) - (1 + i).$$

a) Să se arate că dubletul $(C, \circ)$ formează un semigrup.

b) Să se determine numărul complex α astfel ca dubletul $(C \setminus \{\alpha\}, \circ)$ să formeze un grup.

XII. 11. În corpul $(R, +, \cdot)$ al numerelor reale se definește legea de compoziție internă $\circ$ astfel:

$$\forall x, y \in R, x \circ y = xy + \alpha(x + y) + \beta,$$

unde α este un număr real dat, iar β un parametru real.

Să se determine $\beta \in R$ astfel ca $(R \setminus \{-\alpha\}, \circ)$ să formeze un grup.

XII. 12. În mulțimea M a rotațiilor spațiului în jurul unui punct fix O (respectiv a unei drepte fixe) se introduce legea de compoziție $+$ definită astfel: $\forall \alpha, \beta \in M, \alpha + \beta \in M$ este rotația care se obține făcînd succesiv rotațiile de unghi α și apoi de unghi β .

Să se arate că în raport cu această lege de compunere următoarele mulțimi de rotații formează un grup:

- 1) Mulțimea rotațiilor unui pătrat în jurul centrului său, care transformă pătratul în el însuși.
- 2) Mulțimea rotațiilor spațiului în jurul unui punct fix.
- 3) Mulțimea rotațiilor care fac să coincidă un tetraedru cu el însuși.
- 4) Mulțimea rotațiilor care fac să coincidă un cub cu el însuși.

XII. 13. Fie R mulțimea numerelor reale și $f: R \rightarrow R$ o funcție bijectivă, $f(1) = k$, $k \in R$. Se definește legea de compoziție internă $\circ: R^2 \rightarrow R$ astfel:

$$\forall x, y \in R, x \circ y = f^{-1}[f(x) + f(y) - k].$$

Să se arate că R înzestrată cu această lege este un grup abelian.

XII. 14. În mulțimea Z a numerelor întregi se definește legea de compoziție $\odot$ astfel: $\forall a, b \in Z, a \odot b = r$, unde r este restul împărțirii produsului obișnuit $a \cdot b$ la 10.

a) Fie mulțimea $E = \{2, 4, 6, 8\}$. Să se arate că dubletul $(E, \odot)$ formează un grup.

b) Să se arate că grupul $(E, \odot)$ este izomorf cu grupul $(G, \cdot)$, în care $G = \{-i, -1, 1, i\}$ formează un grup față de operația obișnuită de înmulțire a numerelor complexe.

XII. 15. Fie E o mulțime, diferită de mulțimea vidă și $P(E)$ mulțimea părților mulțimii E . În mulțimea $P(E)$ se definește legea de compoziție internă Δ astfel:

$$\forall A, B \in P(E), A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Să se arate că dubletul $(P(E), \Delta)$ este un grup abelian, izomorf cu grupul $(P(E), \cup)$, unde $\cup$ este operația obișnuită de reuniune a mulțimilor.

XII. 16. Fie $(R, +)$ grupul aditiv al numerelor reale și $(M_3, \cdot)$ grupul multiplicativ al matricelor nesingulare de ordin 3.

a) Să se cerceteze dacă aplicația $U: (R, +) \rightarrow (M_3, \cdot)$ definită prin

$$U(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & 2t + 2t^2 \\ 0 & 1 & 4t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

este un izomorfism al lui $(R, +)$ în $(M_3, \cdot)$

b) Să se determine matricea

$$N = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

astfel încît să rezulte identitatea în $t \in R$:

$$U(t) = I + tN + \frac{t^2}{2} \cdot N^2,$$

unde I este matricea unitate.



XII. 17. Fie $(C, +, \cdot)$ corpul numerelor complexe și mulțimea $K \subset C \times C$, cu $K = \{(a, b) | a, b \in C, a \neq 0\}$. În mulțimea K se introduce legea de compoziție $\odot$ definită astfel:

$$\forall (a_i, b_i) \in K (i = 1, 2), (a_1, b_1) \odot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 a_2 + b_2 \varphi(a_1)).$$

a) Să se determine $\varphi(a)$ astfel ca dubletul $(K, \odot)$ să formeze un grup.

b) Se mai consideră mulțimea

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} \mid a, b \in C, a \neq 0 \right\}$$

în care se definește legea de compoziție $\cdot$ (înmulțirea obișnuită a matricelor). Să se cerceteze dacă grupurile $(K, \odot)$ și $(M_2, \cdot)$ sînt izomorfe.

XII. 18. Fie $(G, \circ)$ un grup și $(H, \circ)$ un subgrup al său. Se spune că $(H, \circ)$ este un subgrup normal (sau invariant) al lui $(G, \circ)$, dacă

$$(\forall x \in H \text{ și } \forall y \in G) \Rightarrow (y \circ x \circ \tilde{y} \in H)$$

unde $\tilde{y}$ este elementul simetric lui y .

a) Să se arate că $(\{e\}, 0)$ este un subgrup normal al lui $(G, \circ)$ [e este elementul neutru din $(G, \circ)$].

b) Dacă $(G, \circ)$ este comutativ, orice subgrup al lui $(G, \circ)$ este normal.

c) Se consideră și grupul $(M, *)$ și fie f un omomorfism al lui $(G, \circ)$ în $(M, *)$.

1. Se numește nucleu al omomorfismului f mulțimea

$$\text{Ker}(f) = \{x | f(x) = e', x \in G, e' \in M\}.$$

Să se arate că nucleul oricărui omomorfism f al lui $(G, \circ)$ în $(M, *)$ cu legea de compoziție $\circ$ este un subgrup normal al lui $(G, \circ)$.

2) Să se arate că mulțimea $\text{Im}(f) = \{f(x) | x \in G\}$ înzestrată cu legea de compoziție $*$ este un subgrup al grupului $(M, *)$.

3) Dacă $(G_1, \circ)$ este un subgrup al lui $(G, \circ)$, atunci $(f(G_1), *)$ cu $f(G_1) = \{f(x) | x \in G_1\}$ este un subgrup al lui $(M, *)$.

4) Dacă $(M_1, *)$ este un subgrup al lui $(M, *)$, atunci și $(G_1, \circ)$ cu $G_1 = f^{-1}(M_1) = \{x | x \in G, f(x) \in M_1\}$ este un subgrup al lui $(G, \circ)$.

XII. 19. Fie mulțimea $M = R \times R = \{(a, b) | a, b \in R\}$ unde R este mulțimea numerelor reale. În mulțimea M se introduc două legi de compoziție $\oplus$ și $\odot$ definite astfel:

$$\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in M; \begin{aligned} (a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\ (a_1, b_1) \odot (a_2, b_2) &= (a_1 a_2 + b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1). \end{aligned}$$

Să se arate că:

a) Mulțimea M înzestrată cu cele două legi de compoziție constituie un inel comutativ.

b) Elementele $(a, b) \in M$, pentru care $a^2 - b^2 = 0$, admit elemente simetrice în raport cu legea de compoziție $\odot$. Mulțimea $G = \{(a, b) | a^2 - b^2 \neq 0, a, b \in R\}$ formează un grup în raport cu legea de compoziție $\odot$.

c) Elementul $(a, b) \in M \setminus \{(0, 0)\}$ pentru care $a^2 - b^2 = 0$ este un divizor al lui zero în inelul $(M, +, \odot)$.

XII. 20. Fie $(R, +, \cdot)$ corpul numerelor reale. În mulțimea $R^2 = R \times R = \{(x, y) | x, y \in R\}$ se introduc două legi de compoziție internă $\oplus$ și $\odot$ definite astfel:

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R^2; \begin{aligned} (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\ (x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) &= (x_1 x_2, y_1 y_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}$$

a) Să se arate că tripletul $(R^2, \oplus, \odot)$ este un inel comutativ cu unitate.

b) Să se precizeze mulțimea divizorilor lui zero pentru inelul $(R^2, \oplus, \odot)$.

c) Fie submulțimea M a lui R^2 definită prin $M = \{(a, b) | a \neq 0, a + b \neq 0, a, b \in R\}$. Să se arate că dubletul $(M, \odot)$ este un grup abelian.

d) Aplicația $f: R^2 \rightarrow R$ definită prin $f(x, y) = x$ este un omomorfism de inele, surjectiv dar nu injectiv (R este aici inelul numerelor reale).

XII. 21. Fie T o mulțime, numită totală, și $P(T) = \{M | M \subset T\}$ mulțimea părților mulțimii T . Dacă $A \in P(T)$, se atașează mulțimii A funcția caracteristică $f_A: T \rightarrow \{0, 1\}$ definită astfel:

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in A, \\ 0 & \text{dacă } x \notin A. \end{cases}$$

Se notează cu F_T mulțimea funcțiilor caracteristice definite pe mulțimea totală și cu valori în mulțimea $\{0, 1\}$, adică

$$F_T = \{f_M | M \in P(T) \text{ și } f_M: T \rightarrow \{0, 1\}\}.$$

În mulțimea F_T se introduc două legi de compoziție $\oplus$ și $\odot$ definite astfel:

$$\forall f_A, f_B \in F_T, (A, B \in P(T)); \begin{aligned} f_A \oplus f_B &= f_A + f_B - 2f_A \cdot f_B, \\ f_A \odot f_B &= f_A \cdot f_B. \end{aligned}$$

a) Să se arate că tripletul $(F_T, \oplus, \odot)$ este un inel comutativ cu divizori ai lui zero.

b) Să se arate că inelul $(P(T), \Delta, \cap)$ este izomorf cu inelul $(F_T, \oplus, \odot)$ unde legile de compoziție Δ și $\cap$ sînt definite astfel:

$$\forall A, B \in P(T); \quad A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ A \cap B = \{x \in T \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$$

c) Se consideră mulțimile $A, B \in P(T)$ și inelul comutativ $\mathcal{A} = (A, \circ, *)$. Se notează cu $M(A, B) = \{\varphi \mid \varphi: A \rightarrow B, \varphi - \text{bijecție}\}$ mulțimea funcțiilor bijective definite pe A și cu valori în B . (Se presupune că mulțimile A, B sînt cardinal echivalente, adică

$\exists \varphi \in M(A, B) \Rightarrow \varphi: A \rightarrow B$, deci $M(A, B) \neq \emptyset$). În mulțimea B se definesc două legi de compoziție $\ominus$ și $\otimes$ astfel:

$$\forall \alpha, \beta \in B; \quad \alpha \ominus \beta = \varphi[\varphi^{-1}(\alpha) \circ \varphi^{-1}(\beta)], \\ \alpha \otimes \beta = \varphi[\varphi^{-1}(\alpha) * \varphi^{-1}(\beta)].$$

Să se arate că tripletul $(B, \ominus, \otimes)$ este un inel, iar funcția $\varphi \in M(A, B)$ realizează un izomorfism între inelele $(A, \circ, *)$ și $(B, \ominus, \otimes)$.

XII. 22. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel comutativ cu elementele neutre: 0 pentru operația $+$ și 1 pentru operația $\cdot$. Se notează cu S o parte a lui A , care are proprietățile:

$$1 \in S \quad (1) \quad 0 \notin S \quad (2)$$

$$a \in S, b \in S \Rightarrow a \cdot b \in S. \quad (3)$$

Fie $F = A \times S$; pe F se definesc:

— o relație binară $\mathcal{R}$:

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in F, (x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) \Leftrightarrow \exists \alpha \in S \text{ astfel ca}$$

$$\alpha \cdot (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0; \quad (4)$$

— o lege de compoziție internă $\oplus$:

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in F, (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 y_2 + x_2 y_1, y_1 y_2); \quad (5)$$

— o lege de compoziție internă $\odot$:

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in F, (x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2). \quad (6)$$

a) Să se arate că relația $\mathcal{R}$ este o relație de echivalență.

b) Să se cerceteze dacă tripletul $(F, \oplus, \odot)$ este un inel comutativ.

c) Să se arate că relația $\mathcal{R}$ este compatibilă cu legile de compoziție $\oplus$ și $\odot$.

d) Să se arate că mulțimea cît $F/\mathcal{R}$ (mulțimea claselor de echivalență în raport cu $\mathcal{R}$) poate fi înzestrată cu două legi de compoziție, pe care le vom nota cu $\circ$ și $*$.

e) Tripletul $(F/\mathcal{R}, \circ, *)$ este un inel comutativ cu element unitate?

XII. 23. În mulțimea R a numerelor reale se consideră două legi de compoziție $\oplus, \odot$ definite prin:

$$x \oplus y = ax + by - 1,$$

$$y \odot y = 2xy - 2x - 2y + c,$$

oricare ar fi $x, y \in R$ și în care a, b, c sînt parametri reali.

Să se determine parametrii reali a, b, c astfel încît prima lege de compoziție să definească pe R o structură de grup abelian, iar împreună cu a doua lege de compoziție să definească pe R o structură de corp.

XII. 24. În mulțimea R a numerelor reale se definesc legile de compoziție $\oplus$ și $\odot$ astfel:

$$\forall x, y \in R; \quad x \oplus y = \sqrt[2n+1]{x^3 + y^3 - 3},$$

$$x \odot y = \sqrt[2n+1]{2x^3 y^3 - 6(x^3 + y^3) + 21}.$$

Să se cerceteze dacă tripletul $(R, \oplus, \odot)$ formează un corp comutativ.

XII. 25. În mulțimea $M = \{x \mid x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$ se definesc următoarele legi de compoziție internă:

$$\forall x, y \in M; \quad x \oplus y = \arctg(\tg x + \tg y + 5),$$

$$x \odot y = \arctg(5 \tg x + 5 \tg y + \tg x \tg y + 20).$$

a) Să se arate că aceste legi de compoziție determină în mulțimea M o structură de corp comutativ.

b) Să se arate că aplicația $f: R \rightarrow M$ definită astfel $f(x) = \arctg(x - 5)$ este un omomorfism al corpului $(R, +, \cdot)$ pe corpul $(M, \oplus, \odot)$.

XII. 26. Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ. În mulțimea $K^2 = K \times K = \{(x, y) \mid x, y \in K\}$ se definește o relație binară:

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R^2, (x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) \Leftrightarrow y_1 - x_1 = y_2 - x_2.$$

a) Să se arate că $\mathcal{R}$ este o relație de echivalență și să se determine mulțimea claselor de echivalență $K^2/\mathcal{R}$.

b) În mulțimea claselor de echivalență $K^2/\mathcal{R} = \{[C(x, y)]_{(x, y) \in K^2}\}$ se definesc două legi de compoziție internă $\oplus$ și $\odot$ astfel:

$$C(x_1, y_1) + C(x_2, y_2) = C(x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$C(x_1, y_1) \odot C(x_2, y_2) = C(x_1 y_1 + x_2 y_2, x_1 x_2 + y_1 y_2)$$

oricare ar fi $C(x_i, y_i) \in K^2/\mathcal{R}$ ($i = 1, 2$).

Să se arate că tripletul $(K^2/\mathcal{R}, \oplus, \odot)$ este un corp comutativ.

XII. 27. Se numesc cuaternioni numerele „hipercomplexe“ de forma $a = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$ unde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sînt numere reale oarecare, iar i, j, k simboluri satisfăcînd relațiile:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, i \cdot j = -j \cdot i = k, j \cdot k = -k \cdot j = i, k \cdot i = -i \cdot k = j.$$

În mulțimea $A = \{a | a \text{ este cuaternion}\}$ a cuaternionilor se introduc două legi de compoziție $+$ și $\cdot$ (adunarea și înmulțirea obișnuită a polinoamelor ținînd seama de relațiile pe care le satisfac simbolurile i, j, k date mai sus).

- Să se arate că tripletul $(A, +, \cdot)$ este un corp necomutativ.
- Se consideră mulțimea matricelor pătrate nesingulare de ordinul 2:

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in R \setminus \{0\}; i^2 = -1 \right\}.$$

Să se arate că tripletul $(M_2, +, \cdot)$ formează un corp necomutativ (aici $+$ și $\cdot$ sînt operațiile obișnuite de adunare și înmulțire a matricelor).

- Să se arate că orice matrice $M \in M_2$ se poate pune sub forma

$$M = aE_0 + bE_1 + cE_2 + dE_3$$

unde

$$E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Filosind această scriere a matricelor mulțimii M_2 , să se arate că corpul $(A, +, \cdot)$ este izomorf cu corpul $(M_2, +, \cdot)$.

Capitolul XIII

PROBLEME RECAPITULATIVE

XIII. 1. Se consideră mulțimea de numere reale

$$M = \{\alpha \in R \mid \alpha = \sqrt{x + 2(1 - \sqrt{x + 1})} - \sqrt{x + 1}; x \in [-1, +\infty)\}.$$

- Să se arate că mulțimea $M' \subset M$, definită astfel:

$$M' = \{\alpha \in R \mid \alpha = \sqrt{x + 2(1 - \sqrt{x + 1})} - \sqrt{x + 1}; x \in (0, +\infty)\}$$

are un singur element.

- Să se determine mulțimea $M \setminus M'$.

(Concursul de matematică, 1971)

XIII. 2. Se dau mulțimile

$$A = \{(t, 4 - t^2) \mid t \in R \setminus \{0\}\} \subset R \times R, B = \{(m + t, m + 4 - t^2) \mid$$

$$t \in R, m \in R \setminus \{0\}\} \subset R \times R.$$

- Dacă $R \times R$ este imaginea planului ortogonal xOy , să se găsească imaginile mulțimilor A și B .

- Să se determine m astfel ca 1) $A = B$; 2) $A \cap B = \{(1, 3)\}$.

XIII. 3. Se consideră mulțimile:

$$A = \{(a \cos t, b \sin t) \mid t \in R\} \subset R \times R, B = \left\{ \left(\frac{c(1 - t^2)}{1 + t^2}, \frac{2dt}{1 + t^2} \right) \mid t \in R \right\} \subset R \times R,$$

cu a, b, c, d — numere reale oarecare.

a) Să se găsească imaginile mulțimilor A și B în planul ortogonal xOy .

b) Să se determine relația dintre a, b, c, d astfel ca:

1) $A = B$; 2) $A \cap B = \Phi$; 3) $A \cap B = \{(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)\}$.

c) Pentru $a = c = d$ să se găsească în planul xOy mulțimea

$$M = M_1 \cap M_2 \text{ cu } M_1 = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 < 0, x, y \in R \right\},$$

$$M_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - a^2 < 0, x, y \in R\}.$$

XIII. 4. Se consideră aplicația $f: R \rightarrow R$ definită de $x \rightarrow f(x) = y = a|x + 1| + |x - 1| + (2 - a)x - a - 1$.

a) Să se determine valorile lui a pentru care această aplicație este bijectivă.

b) În cazul în care f este bijectivă, să se arate că aplicația reciprocă f^{-1} poate fi definită prin $x \rightarrow f^{-1}(x) = \alpha|x + 1| + \beta|x - 1| + \gamma x + \delta$, α, β, γ și δ fiind funcții de a , care urmează să se determine.

(Journal de mathématiques élémentaires, 1970)

XIII. 5. Se consideră funcția $f: \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [\sqrt{3}, 2]$ dată de legea $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{cosec} x$.

a) Să se arate că funcția f este o bijecție.

b) Să se construiască funcția inversă f^{-1} a funcției f .

(Concursul de matematică, 1971)

XIII. 6. Se dă funcția $f: R \rightarrow R$, $f(x) = -1 + |x + 1| - 2|x| + |x - 1|$.

a) Să se studieze variația funcției și să se construiască graficul corespunzător.

b) Să se rezolve inecuația $|x + 1| + |x - 1| > 2|x| + \frac{2x + 4}{5}$.

(Examenul de definitivare profesori II, 1974)

XIII. 7. Se consideră funcția $f: R \rightarrow R$, definită prin

$$f(x) = \frac{[x] - x}{[x] + |x| + 1},$$

unde prin $[x]$ s-a notat partea întreagă a lui x .

Să se studieze și să se traseze graficul funcției $f(x)$.

(Concursul pentru ocuparea catedrelor vacante, profesori I, 1975)

XIII. 8. Se dă ecuația $x^2 - y^2 + 2y - 10 = 0$ și sistemul

$$\begin{cases} (m - 1)x + m(m - 1)y = m + 1, \\ x - 2y = 1, \end{cases} \quad m \in R.$$

a) Să se rezolve în numere întregi ecuația.

b) Să se rezolve și să se discute sistemul.

c) Dacă A este mulțimea soluțiilor ecuației și B mulțimea soluțiilor sistemului, să se determine mulțimea $C = A \cap B$ și valorile corespunzătoare pentru m .

XIII. 9. Se consideră polinoamele $A(x, m) = (2m^2 - 3m + 1)(mx^2 - 2x^2 - 2mx + 4x + 6 - 3m)$ și $B(x, m) = (m^2 - 3m + 2)(2mx^2 - x^2 - 8mx + 4x + 6m - 3)$ unde $(2m - 1)(m - 1)(m - 2) \neq 0$.

a) Să se scrie fiecare polinom sub formă de produs de factori de gradul întâi.

b) Să se simplifice fracția $F = \frac{A(x, m)}{B(x, m)}$.

c) Pentru ce valori ale lui x , fracția F simplificată are valori mai mari decât 1?

d) Să se determine valorile întregi ale lui x pentru care F are ca valori, numere întregi.

(Concursul de matematică, 1972)

XIII. 10. Să se determine toate polinoamele de gradul n care verifică relația $P(x) = P^{(1)}(x) \cdot P^{(2)}(x) \dots P^{(n)}(x)$, unde $P^{(k)}(x)$ este derivata de ordinul k a polinomului $P(x)$.

(Concursul de matematică, 1976)

XIII. 11. Se dă polinomul $P(x) = m(x - a)^3 + n(x - b)^3 + p(x - c)^3$, cu a, b, c constante date, reale și diferite, iar m, n, p trei parametri cu valori reale. Să se arate că:

1) Dacă polinomul $P(x)$ este identic egal cu o constantă, atunci el este identic nul.

2) Dacă m, n, p au valori strict pozitive, polinomul $P(x)$ admite o singură rădăcină reală.

3) Dacă $P(a) = P(b) = 0$, atunci și $P(c) = 0$.

(Institutul politehnic, București, 1974)

XIII. 12. Se dă polinomul $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6$. Să se determine a și b în așa fel încât polinomul $P_1(x) = P(x + 1) + P'(x)$ să se dividă cu $x - 1$ iar polinomul $P_2(x) = P(x - 1) - P'(x)$ să se dividă cu $x + 1$ [Prin $P'(x)$ s-a notat derivata polinomului $P(x)$].

(Institutul politehnic, Cluj-Napoca, 1974)

XIII. 13. Se dă polinomul $P(x) = x^3 + ax^2 + 2x + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine b , în funcție de a , astfel ca $P(x)$ să fie divizibil prin $x + 2$.

b) Fie $Q(x) = \frac{P(x)}{x+2}$. Să se rezolve ecuația $Q(x) = 0$ știind că are rădăcini egale.

c) Pentru ce valori ale lui a rădăcinile ecuației $Q(x) = 0$ sînt reale și de semne contrare.

d) Pentru ce valori ale lui a rădăcinile ecuației $Q(x) = 0$ satisfac relația $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \geq \frac{1}{2}$.

(Institutul politehnic, Brașov, 1971)

XIII. 14. Să se arate că dacă un polinom cu coeficienți raționali admite rădăcina $\sqrt[3]{2}$ atunci polinomul se divide cu $x^3 - 2$.

(Concursul de matematică, 1976)

XIII. 15. Se dă polinomul cu coeficienți reali: $P(x) = x^4 + ax^3 + bx + c$.

a) Să se arate că nu există valori ale coeficienților a, b, c astfel ca $P(x)$ să se dividă cu $Q(x) = x^3 - x$.

b) În cazul cînd $P(0) = P(1)$, să se determine coeficienții a, b, c astfel ca $P(x)$ să admită rădăcina $x_1 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$. În acest caz să se determine și celelalte rădăcini ale polinomului $P(x)$.

c) În cazul cînd $a = -2$, să se determine coeficienții b și c astfel ca $P(x)$ să admită o rădăcină triplă diferită de zero.

d) Pentru $a = -2$, $b = 2$, $c = -1$, să se determine valorile lui $x \in \mathbb{R}$, astfel ca $e^{P(x)} \leq 1$.

(Institutul politehnic, București, 1975)

XIII. 16. Se dau polinoamele: $P(x, m) = 2mx^3 + (2m^2 + 2m + 1)x^2 + (2m^2 + m + 1)x + m$, $Q(x, m) = 2mx^2 + (2m^2 + 1)x + m$, $m \neq 0$ fiind un parametru real.

a) Să se arate că polinomul $P(x, m)$ se divide prin $Q(x, m)$.

b) Să se determine valorile lui m pentru care ecuația $P(x, m) = 0$ admite rădăcina $x = m$.

c) Dacă se notează cu x_1, x_2 rădăcinile ecuației $Q(x, m) = 0$, să se formeze, folosind relațiile între rădăcini și coeficienți ecuația care admite rădăcinile $y_1 = \frac{1}{x_1} - mx_2$, $y_2 = \frac{1}{x_2} - mx_1$.

(Institutul de construcții, București, 1971)

XIII. 17. Se consideră ecuația $(m^2 - 1)x^2 - 2(m^2 + 2)x + m^2 - 4 = 0$, unde m este un parametru real.

a) Să se discute natura și semnele rădăcinilor ecuației și să se rezolve.

b) Să se afle valorile lui m astfel încît ecuația dată să aibă o rădăcină în intervalul $[-1, +1]$.

c) Pentru ce valori ale lui m , $(m^2 - 1)x^2 - 2(m^2 + 2)x + m^2 - 7 < 0$ oricare ar fi x real?

(Institutul politehnic, Brașov, 1971)

XIII. 18. Se dau ecuațiile $P(x, m) = x^3 - 2(m + 1)x^2 + (6m - 1)x - 4m + 2 = 0$, $Q(x, m) = x^2 - (m + 3)x + 2(m + 1) = 0$, cu m parametru real.

a) Să se arate că cele două ecuații au o rădăcină comună oricare ar fi valoarea lui m .

b) Să se afle valorile parametrului m astfel ca ecuațiile să aibă încă o rădăcină comună și să se rezolve în acest caz.

c) Notînd cu m_0 cea mai mică valoare a lui m , care satisface condiția de la punctul precedent, să se rezolve inecuația

$$\frac{1}{P(x, m_0)} - \frac{1}{Q(x, m_0)} > 1.$$

d) Să se determine m astfel ca graficul funcției $y = Q(x, m)$ să aibă ca axă de simetrie dreapta $x = 3$.

(Institutul pedagogic, Suceava, 1971)

XIII. 19. Se dă ecuația $t^2 + 2(2 - x)t + y + 3 = 0$ în care t este necunoscuta, iar $x, y \in \mathbb{R}$. Considerînd punctul $M(x, y)$ din planul ortogonal xOy , se cere:

a) Mulțimea punctelor M pentru care ecuația dată admite o rădăcină egală cu -1 .

b) Mulțimea punctelor M pentru care $|t_1 + t_2| = 2t_1t_2$, unde t_1 și t_2 sînt rădăcinile ecuației.

c) Mulțimea (G) a punctelor M pentru care ecuația dată are două rădăcini egale. Să se traseze (G) .

d) Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, analitic și grafic, sistemul de ecuații $\sqrt{(2 - x)^2} = y + 3$; $(2 - x)^2 = x + 3$.

e) Notînd $f(t) = t^2 + 2(2 - x)t + y + 3$, să se determine poziția punctului M în plan, astfel încît pentru orice t real să existe relația $f(3t) = 9f(t-1)$.

f) Să se împartă planul xOy în regiuni, după natura și semnul rădăcinilor ecuației date.

(Concursul de matematică, 1972)

XIII. 20. Se consideră ecuația $f(x) = (m + n)x^2 - 2(m - n)x - (m + n + 2) = 0$, unde $m, n \in R$ sînt parametri variabili.

a) Să se discute natura și semnul rădăcinilor ecuației cînd m și n sînt coordonatele unui punct din plan.

b) Să se determine regiunile din plan în care rădăcinile ecuației sînt cuprinse în $(-1, 1)$.

XIII. 21. Se dă familia de parabole

$$y = (m - 1)x^2 - mx - 2m + 1, m \in R \setminus \{1\}.$$

a) Să se determine valorile lui m pentru care vîrfurile acestor parabole sînt situate în cadranul I între axa $x'x$ și prima bisectoare.

b) Să se găsească ecuațiile parabolilor care au vîrfurile pe a doua bisectoare.

c) Să se arate că parabolele trec prin două puncte fixe, ale căror coordonate se cer.

d) Există valori ale lui m pentru care parabolele nu intersectează axa $x'x$?

e) Să se determine ecuațiile parabolilor care sînt tangente la prima bisectoare.

XIII. 22. Se dă funcția $f(x) = (1 - 2 \cos \alpha)x^2 + 2x \sin \alpha + 8 \cos \alpha$, cu $x \in R$, unde α este un parametru real.

a) Să se arate că pentru valorile lui α care satisfac $\frac{1}{5} < \cos \alpha < \frac{1}{3}$ este adevărată inegalitatea $f(x) > 0$, pentru orice $x \in R$.

b) Dacă x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației $f(x) = 0$, să se arate că expresia $E = 16(x_1^2 + x_2^2) - 3x_1^2 x_2^2$ nu depinde de α .

c) Să se indice valorile lui α pentru care funcția dată admite un minim sau un maxim și să se calculeze aceste valori.

d) Există valori ale lui α pentru care funcția dată nu admite nici minim, nici maxim?

(Facultatea matematică-mecanică, Iași, 1972)

XIII. 23. Se dă sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} y^2 - 4x^2 - 4x - 1 = 0, \\ y - mx = -3, \end{cases}$$

unde m este un parametru real.

a) Să se rezolve sistemul.

b) Să se afle valoarea lui m pentru care soluțiile sistemului sînt confundate și să se rezolve sistemul în acest caz.

c) Să se afle valorile lui m pentru care ambele soluții ale sistemului sînt formate din numere întregi.

d) Să se afle valorile lui m pentru care una din soluții este formată din numere pozitive.

(Institutul pedagogic, Suceava, 1971)

XIII. 24. Se dă sistemul:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0, \\ \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0, \\ (b - c)x + (c - a)y + (a - b)z = 3, \end{cases}$$

cu a, b, c numere reale date, diferite între ele.

a) Să se rezolve sistemul.

b) Să se arate că dacă $a < b < c$, atunci $x + y + z < 0$ unde x, y și z formează soluția sistemului.

(Institutul politehnic, București, 1974)

XIII. 25. Se consideră sistemul

$$\begin{cases} x + y + z = m, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = n, \\ xyz = p. \end{cases}$$

a) Să se rezolve sistemul, dacă $m = \frac{13}{12}$, $n = 9$, $p = \frac{1}{24}$.

b) Considerînd în sistem $p = 2$, să se determine m și n astfel ca $x = 1 + i$, $y = 1 - i$. Să se calculeze valoarea reală a expresiei $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$.

(Facultatea de științe economice, Timișoara, 1971)

XIII. 26. Să se rezolve sistemele:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a^2, \\ \log_x \sqrt[3]{a} + \log_y \sqrt[3]{b} = \frac{a}{\sqrt[3]{3}} \end{cases} \quad (1) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \lg x + \frac{1}{2} \lg y - \lg(4 - \sqrt{2}) = 0, \\ (25\sqrt{x})^{\sqrt{y}} - 125 \cdot 5^{\sqrt{y}} = 0. \end{cases}$$

(Examen oral-Facultatea de matematică-mecanică București)

XIII. 27. a) Suma a trei numere în progresie aritmetică este egală cu 9. Adăugând acestor numere respectiv 1, 1, 3 se obțin alte trei numere în progresie geometrică. Să se afle aceste trei numere.

b) Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 6, \\ \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{11}{6}, \\ xyz = 6abc, \end{cases}$$

unde a, b, c sînt primii termeni ai progresiei cu rația pozitivă de la punctul a).

(Institutul politehnic, Timișoara, 1971)

XIII. 28. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{\log_a \sqrt[3]{ax} + \log_x \sqrt[3]{ax}} = a - \sqrt{\log_a \sqrt[3]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[3]{\frac{a}{x}}}$$

unde $a > 0, a \neq 1$.

(Institutul politehnic, Brașov, 1970)

XIII. 29. Să se rezolve ecuația

$$1 + \log_x \frac{4-x}{10} = (\log_{10} \log_{10} n - 1) \cdot \log_x 10,$$

unde n este număr natural. Cite rădăcini are ecuația pentru un n dat?

(Facultatea de chimie, Craiova, 1971)

XIII. 30. Fie ecuația

$$\frac{2^x + a \cdot 3^x}{2^x - a \cdot 3^x} = 2, \quad a \in \mathbb{R},$$

a) Să se rezolve ecuația.

b) Pentru ce valori ale lui a rădăcina este un număr întreg

(Facultatea de științe economice, Craiova, 1971)

XIII. 31. Să se rezolve ecuațiile:

$$a) \log_2 (9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2 (3^{x-1} + 1),$$

$$b) \frac{\lg(5 - x^3)}{\lg(1 + x)} = 2,$$

(Institutul de petrol și gaze, Ploiești, 1975)

XIII. 32. a) Baza unui sistem de logaritmi fiind reprezentată prin numărul $\frac{ax+b}{abx}$ să se determine x știind că în această bază există relația

$$\log \left(\frac{4}{a^3 b^3 x^3} \right) + 2 \log (ax + b) = 4.$$

b) Să se rezolve inegalitatea

$$\left(\frac{1}{2} \right)^{\log_1 (x^2 - 3x + 1)} > 1.$$

(Examen oral - Facultatea de fizică, București)

XIII. 33. Fie $F(x) = \frac{(x-a)(b-x)}{\log_c |x-1|}$ cu $a, b \in \mathbb{R}, c \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

a) Să se rezolve inecuația $F(x) > 0$ pentru $a = \frac{1}{2}, b = 3$.

b) Să se determine valorile lui a și b astfel ca $F(x) < 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, c\}$.

[Pentru $c = 2$, Concursul de matematică, 1976]

XIII. 34. a) Să se demonstreze că ecuația $\frac{\lg(x^2 + m^2) - \lg m}{\lg(3x)} = 1$ are rădăcini reale, oricare ar fi parametrul real $m > 0$.

b) Să se determine m astfel ca ecuația de la punctul a) să aibă numai o rădăcină în intervalul $(0, 1)$.

c) Să se stabilească semnul expresiei

$$E = \frac{\log_3(x^2 - 8)}{\log_1(x^2 - 5x + 7)}.$$

(Institutul pedagogic, Suceava, 1971)

XIII. 35. Să se determine numărul x știind că al șaselea termen al dezvoltării binomului

$$\left(\sqrt[5]{2^{10-3x}} + \sqrt[5]{2^{(x-2) \lg 3}}\right)^n$$

este egal cu 21 și că coeficienții termenilor de rangul doi, trei și patru sînt respectiv primul, al treilea și al cincilea termen ai unei progresii aritmetice.

(Institutul politehnic, Brașov, 1970)

XIII. 36. Se consideră două numere complexe distincte:

$$z_0 = r(\cos \alpha_0 + i \sin \alpha_0), z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

avînd același modul r . Se cere:

a) Să se determine argumentul expresiei $E = (z - z_0) : (z + z_0)$ și să se explice geometric rezultatul.

b) z_0 fiind dat, să se determine argumentul lui z astfel încît $|z + z_0| = r$.

c) Să se arate că există numai două valori distincte z_1 și z_2 ale lui z pentru care are loc această egalitate și că z_1 și z_2 verifică ecuația $z^3 = z_0^3$.

Să se calculeze în funcție de z_0 valorile pe care le ia suma $S_n = z_0^n + z_1^n + z_2^n$, n fiind un număr întreg.

(Institutul politehnic, București, 1971)

XIII. 37. Se dă ecuația $4x^2 + (4 + i)x + A + iB = 0$, $A, B \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine A și B pentru care ecuația admite rădăcini egale.

b) Să se găsească relația dintre A și B pentru care ecuația admite o rădăcină reală.

c) Să se arate că dacă A și B variază, satisfăcînd condiția de la punctul b), atunci cea mai mare valoare pe care o poate lua A este $A = 1$ și să se stabilească între ce valori pot varia A și B pentru ca ambii parametri să ia simultan valori cuprinse între -1 și $+1$.

d) Să se demonstreze că se obține $A = \sin^2 2\alpha$ dacă pentru aceeași condiție se pune $B = \sin^2 \alpha$, pentru valorile $0 \leq B \leq 1$ și să se găsească arcele α pentru care $A + B = 1$.

(Facultatea de studii economice Iași, 1972)

XIII. 38. Se dă polinomul $P(z) = (z + i)^n + (z - i)^n$, unde n este număr natural.

a) Să se rezolve ecuația $\frac{P(z)}{(z - i)^n} = 0$.

b) Să se arate că rădăcinile lui $P(z)$ pot fi puse sub forma $z_k = -\cotg s_k$, unde s_k sînt unghiuri cuprinse între 0 și π .

c) Să se facă calculabilă prin logaritmi expresia

$$E = 1 + z_k + z_k^2 + z_k^3,$$

unde z_k sînt rădăcinile calculate la punctul b).

(Facultatea de matematică, Craiova, 1973)

XIII. 39. Se dă polinomul $P(x) = \lambda x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda$, unde λ este un parametru real. Se notează cu x_1, x_2 rădăcinile lui $P(x)$.

1) Pentru ce valori ale lui λ , $P(x) > 0$ oricare ar fi x real?

2) Pentru ce valori ale lui λ are loc relația $x_1 < 1 < x_2$?

3) Pentru ce valori ale lui λ , x_1 și x_2 se pot scrie sub forma $x_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $x_2 = \cos \alpha - i \sin \alpha$, cu α real?

4) Să se determine α astfel încît numerele $x_1, 2\lambda, x_2$ să fie în progresie geometrică.

(Facultatea de fizică, Iași, 1974)

XIII. 40. Se dau matricele:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{1+i} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{1+i} \end{bmatrix} \quad (i = \sqrt{-1})$$

a) Să se afle numărul $\det(A \cdot B)$.

b) Să se găsească matricea X care are elementele de pe diagonala a doua egale cu zero și care satisface relația $A^t \cdot X = B$, cu A^t transpusa matricei A .

c) Să se rezolve ecuația matriceală $X \cdot Y = A \cdot B$, unde X este matricea găsită la punctul b).

XIII. 41. Se consideră matricea $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ unde a, b, c, d

sînt numere reale și matricea unitate $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Să se calculeze matricea $A = M^2 - \lambda M - \mu I$, unde λ și μ sînt doi parametri.

b) Să se determine parametrii λ și μ pentru care matricea A este egală cu matricea zero.

c) Să se determine relația dintre a, b, c, d astfel încît soluția găsită la punctul b) să fie unică.

(Facultatea de chimie industrială, București, 1971)

XIII. 42. Se dau matricele

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} m & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Să se găsească valoarea parametrului real m astfel încît să existe trei constante nu toate nule a, b, c cu condiția $a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C = 0$.

b) Cu m astfel determinat să se găsească aceste constante.

(Concursul de matematică, 1972)

XIII. 34. Se consideră sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x - y + z = 1, \\ x + (\lambda^2 - \lambda - 1)y + (\lambda + 1)z = 2, \\ 2x + (\lambda^2 - \lambda - 2)y + 2(\lambda + 1)z = 3. \end{cases} \quad \lambda \in R.$$

a) Să se rezolve și să se discute după valorile parametrului λ .

b) Să se arate că numerele $\frac{x}{y}, x - y, 1 - \frac{1}{y}$ sînt în progresie aritmetică pentru orice $\lambda \in R \setminus \{0, 1\}$ (x, y, z fiind soluția sistemului).

c) Să se arate că suma puterilor $3n$ a rădăcinilor ecuației $x(\lambda) = 0$ este egală cu $(-1)^n \cdot 2$ (n fiind număr natural).

(Academia militară, București, 1969)

XIII. 44. Se dă sistemul

$$\begin{cases} m^2x + z = -m^2, \\ m^2z - y = m^2, \\ m^2y + x = m^2, \end{cases}$$

unde m este un parametru real.

a) Să se rezolve și să se discute sistemul în funcție de parametrul m .

b) Să se arate că rădăcinile ecuației $\Delta = 0$ formează un grup multiplicativ, unde Δ este determinantul sistemului.

XIII. 45. Se dă ecuația:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & \cos^2 \alpha - \sin 2\alpha & 5 \\ 0 & x^2 & -1 \\ -1 & \frac{25}{9} \sin^2 \alpha & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

unde parametrul $\alpha \in [0, 2\pi]$.

a) Să se determine parametrul α astfel încît rădăcinile ecuației $\Delta = 0$ să satisfacă relația $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{25}{9}$.

b) Să se separe cu ajutorul teoremei lui Rolle rădăcinile ecuației $\Delta = 0$, în cazul $\alpha = \pi$.

c) Să se rezolve ecuația $\Delta = 0$ pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$ și să se găsească elementele triunghiului (laturi și unghiuri) cu vîrfurile în punctele reprezentate de rădăcinile găsite.

(Facultatea de științe economice, Iași, 1972)

XIII. 46. Se consideră ecuația $x^3 - px + q = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 .

a) Să se arate că $\Delta^2 = 4p^3 - 27q^2$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$

b) Să se deducă de aici o condiție necesară ca ecuația dată să admită numai rădăcini reale. Este această condiție și suficientă?

c) Pentru $p = \log_{\sqrt{2}} 8 + 3 \log_4 \sqrt[3]{16} + 12 \log_{\frac{1}{8}} \sqrt{2}$, să se determine $q \neq 0$, astfel ca $x_1 \cdot x_2 = -5$. Să se rezolve apoi ecuația.

XIII. 47. Se consideră sistemul

$$\begin{cases} x - 3y + 4 = 0, \\ x + y - 4ab = 0, \\ (a^2 + 1)x - (2ab + 1)y + p = 0, \end{cases}$$

unde a, b, p sînt trei parametri reali.

a) Să se afle relația ce trebuie să existe între a, b, p pentru ca sistemul de mai sus să fie compatibil.

b) Notîndu-se această condiție cu $f(a, b, p) = 0$ să se studieze natura rădăcinilor ecuației în $a, f(a, 1, p) = 0$ (obținută pentru $b = 1$) cînd $p \in R$.

(Institutul politehnic, Timișoara, 1971)

XIII. 48. Se dă un polinom $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, avînd coeficienții a, b, c, d (în această ordine) în progresie geometrică cu rația $q > 0$.

a) Să se arate că ecuația $P(x) = 0$ are o singură rădăcină reală și că toate rădăcinile acestei ecuații au același modul.

b) Notînd cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $P(x) = 0$ să se arate că oricare ar fi numărul natural n , suma $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$ este reală. În ce caz $S_n > 0$?

c) Pentru $a = 1$ să se determine rația q astfel ca ecuația $P(x) \nrightarrow + P\left(\frac{1}{x}\right) = 16$ să admită rădăcina $x = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ și apoi să se rezolve această ecuație.

(Institutul politehnic, București, 1970).

XIII. 49. Se dă polinomul $P(x) = 2x^3 + mx^2 + nx + p$.

a) Să se determine parametrii m, n, p astfel ca să fie divizibili cu polinomul $Q(x) = (2x - 1)(x + 1)^2$.

b) Să se rezolve inecuația $P(|x - 1|) > 0$, cu valorile lui m, n, p determinate la punctul a) și $x \in R$.

c) Să se formeze ecuația care are rădăcinile

$$y_1 = \frac{x_2 x_3}{x_1}, y_2 = \frac{x_1 x_3}{x_2}, y_3 = \frac{x_1 x_2}{x_3},$$

unde x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuației $P(x) = 0$.

(Institutul politehnic, Brașov, 1971)

XIII. 50. Se dă ecuația

$$\begin{vmatrix} x^3 & 1 & x \\ 1 & -1 & 1 \\ x & 1 & a \end{vmatrix} = 0, \quad a \in R$$

1) Să se discute natura și semnul rădăcinilor ecuației știind că admite o rădăcină întregă.

2) Să se determine parametrul a astfel încît între rădăcinile ecuației să existe relația: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 < (x_1 x_2 x_3)^2$.

3) Să se determine parametrul a , astfel încît ecuația să admită o singură rădăcină în intervalul $(0, 1)$.

(Institutul de petrol și gaze, Ploiești, 1975)

XIII. 51. Se dau ecuațiile

$$x^3 - 27x + a = 0, \quad x^4 - 4x^3 + mx^2 - nx + 18 = 0.$$

a) Să se separe rădăcinile reale ale primei ecuații în funcție de parametrul real a .

b) Să se determine m și n din ecuația a doua, astfel ca rădăcina dublă pozitivă a primei ecuații să fie rădăcină dublă comună a ambelor ecuații și să se rezolve ecuația a doua.

(Institutul politehnic, Galați, 1970)

XIII. 52. Se dă polinomul $P(z) = 2(m + 1)^2 z^4 - 2(m + 1)(4m + 1)z^3 + (11m^2 - 8)z^2 - (7m^2 - 10m - 8)z + 2m(m - 2)$ unde $m \in R \setminus \{-1\}$.

a) Să se arate că $P(z)$ este divizibil cu $Q(z) = z^2 - 3z + 2$ și să se afle cîtul.

b) Să se discute natura și semnul rădăcinilor ecuației $P(z) = 0$, în funcție de valorile lui m .

(Institutul politehnic, Galați, 1970)

XIII. 53. Se consideră ecuația $x^4 - (2a + 1)x^3 + (a^2 + 2a - 3)x^2 - (a^2 - 4a - 1)x - 2a^2 + 2 = 0$, unde a este un parametru real.

a) Să se rezolve ecuația știind că admite rădăcini independente de a .

b) Să se determine valorile lui a pentru care:

$$\begin{aligned} x_1 x_2 x_3 x_4 &\leq x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 \leq \\ &\leq x_1 + x_2 + x_3 + x_4. \end{aligned}$$

c) Să se separe cu ajutorul teoremei lui Rolle rădăcinile reale ale ecuației în a :

$$x_1 x_2 x_3 x_4 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 12 \ln a = 0,$$

unde x_1, x_2, x_3, x_4 sînt rădăcinile ecuației date.

(Institutul politehnic, București, 1971).

XIII. 54. Ecuația $x^4 + 4x^3 - 34x^2 - mx + 105 = 0$ (1) are rădăcinile în progresie aritmetică.

a) Să se scrie ecuația care are ca rădăcini inversele rădăcinilor ecuației (1).

b) Să se arate că cele două ecuații au o rădăcină comună.

c) Să se rezolve ecuația dată.

(Institutul politehnic, Cluj, 1970)

XIII. 55. Se dă ecuația $2x^5 + x^4 \sin 4a - x^3 \sin 3a + x^2 \sin 2a - x \cdot \sin a + 2 = 0$.

a) Să se afle valorile parametrului a , pentru care această ecuație admite rădăcina $x = -1$.

b) Folosind teorema lui Rolle, să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuației date, în cazul particular când $a = \frac{\pi}{2}$.

c) Să se arate că oricare ar fi $a \in R$, ecuația dată nu admite pe $x = -1$ ca rădăcină dublă.

(Institutul politehnic, București, 1970)

XIII. 56. Se dă polinomul $P(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 + mx^2 - 2mx + 4(m-4)$, $m \in R$.

a) Să se verifice că polinomul $P(x)$ admite rădăcina $x_1 = 1 + i\sqrt{3}$.

b) Să se discute natura rădăcinilor ecuației $P(x) = 0$ în funcție de m și să se arate că pentru nici o valoare a lui m nu are rădăcină triplă.

c) Pentru ce valori ale lui m este îndeplinită dubla inegalitate:

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} \leq \frac{1}{2}?$$

d) x_1 și x_2 fiind rădăcinile lui $P(x)$, complexe pentru orice m , să se pună x_1 și x_2 sub formă trigonometrică și să se găsească valorile lui n , număr natural, pentru care $x_1^n + x_2^n + (x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5)^{n+1} = 0$.

(Facultatea de științe economice, Iași, 1971)

XIII. 57. Se dă ecuația $(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n = 1$.

a) Să se transforme această ecuație făcând substituția $x = \cos \alpha$ și să se deducă de aici că ecuația dată admite rădăcini reale cuprinse în intervalul $(-1, 1)$ oricare ar fi n natural.

b) Transformând ecuația dată cu substituția $x = \frac{1}{\sin \varphi}$ să se arate că ecuația nu admite rădăcini reale în afara intervalului $(-1, 1)$.

c) În cazul $n = 4$ să se scrie ecuația dată sub forma cea mai simplă și să se rezolve. Să se compare cu rezultatele de la primul punct.

(Institutul politehnic, București, 1971)

XIII. 58. Se notează cu x_1 și x_2 rădăcinile complexe ale ecuației $x^3 + 1 = 0$.

a) Să se calculeze $x_1 + x_2$, $x_1^2 + x_2^2$, $x_1^3 + x_2^3$, $x_1^6 + x_2^6$. Să se arate că valorile obținute sînt singurele valori pe care le poate lua expresia $E(n) = x_1^n + x_2^n$, când n ia toate valorile întregi.

b) Să se determine valorile lui n pentru care $E(n) = 1$.

c) Să se determine parametrii a și b astfel ca rădăcinile ecuației date să verifice și ecuația $x^7 - 3x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$ și apoi să se rezolve această ecuație.

(Institutul Politehnic, București, 1971)

XIII. 59. În inelul claselor de resturi modulo 13 să se rezolve:

a) ecuația $\widehat{10} \cdot \widehat{x} + \widehat{8x} = \widehat{12}$.

b) sistemul

$$\begin{cases} \widehat{3} \cdot \widehat{x} + \widehat{8} \cdot \widehat{y} + \widehat{8} \cdot \widehat{z} = \widehat{3}, \\ \widehat{8} \cdot \widehat{x} + \widehat{8} \cdot \widehat{y} + \widehat{3} \cdot \widehat{z} = \widehat{0}, \\ \widehat{8} \cdot \widehat{x} + \widehat{3} \cdot \widehat{y} + \widehat{8} \cdot \widehat{z} = \widehat{5}. \end{cases}$$

[punctul b) — Facultatea de matematică-mecanică București, 1971]

XIII. 60. În mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $*$ prin: $\forall x, y \in R, x * y = xy + x + y$. Legea astfel definită determină pe intervalul $[-1, +\infty)$ o structură de grup? Dar pe $(-1, +\infty)$?

[Concursul pentru ocuparea catedrelor vacante, profesori II, 1976]

XIII. 61. În mulțimea C a numerelor complexe se definesc operațiile $*$, $\circ$ prin relațiile $a * b = a + b + 1$, $a \circ b = a + b + i$; $i^2 = -1$.

a) Să se arate că mulțimile $(C, *)$ și $(C, \circ)$ sînt grupuri izomorfe, izomorfismul fiind dat de aplicația $f: (C, *) \rightarrow (C, \circ)$ definită prin egalitatea $f(z) = iz$, $\forall z \in C$.

b) Să se arate că grupul multiplicativ $(G, \cdot) = \{1, i, -1, -i\}$ este izomorf cu grupul aditiv al claselor de resturi modulo 4.

[Punctul a) — Facultatea de fizică, Timișoara, 1971]

XIII. 62. Se consideră sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 2xyz + 2(m^2 - 3)x + 2y + (m - 1)z = 0, \\ xyz + (\alpha - m^2)x + my + 3z = 0, \\ xyz + mx + z = 0, \end{cases}$$

unde α și m sînt doi parametri reali.

a) Să se rezolve sistemul în funcție de m și α , în cazul când are un număr finit de soluții și nici o necunoscută nu este nulă.

b) Să se găsească și soluțiile sistemului în care numai una din necunoscute este nulă.

c) Să se precizeze, cu ajutorul șirului lui Rolle și după valorile lui α , intervalele în care se găsește m , astfel încât să avem

$$\begin{vmatrix} 2(m^2 - 3) & 2 & m - 1 \\ \alpha - m^2 & m & 3 \\ m & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

d) În mulțimea $E = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ se definește legea de compoziție internă $\top$, punând $x \top y = a(x^2 + y^2) + 2xy + 2(m^2 - 3)x + 2y + m - 1$, $\forall x, y \in E$, unde a este o constantă reală. Să se găsească valorile lui a și m , astfel ca această lege de compoziție să determine pe E o structură de grup și să se arate că acest grup este comutativ.

(Academia militară, București, 1971)

XIII. 63. Fie M mulțimea matricelor de forma:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a + b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

unde a, b, c sînt numere raționale.

a) Să se demonstreze că mulțimea M constituie un grup față de operația de adunare a matricelor.

b) Fie A_1, A_2, A_3 , trei matrice din mulțimea M :

$$A_i = \begin{bmatrix} a_i & 0 \\ 0 & a_i + b_i \\ b_i & c_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3,$$

astfel încît următoarea relație să fie îndeplinită:

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Pentru matricele A_1, A_2, A_3 următoarele proprietăți sînt adevărate:

1) dacă $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sînt numere raționale așa încît să existe: $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = 0$, atunci $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$;

2) orice matrice A din mulțimea M se scrie, în mod unic, sub forma $A = uA_1 + vA_2 + wA_3$, unde u, v, w sînt numere raționale.

(Facultatea de matematică-mecanică, București, 1975)

XIII. 64. Fie E mulțimea numerelor reale de forma $a + b\sqrt{2}$ cu $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$ și M mulțimea matricelor de forma:

$$\begin{bmatrix} u + 2v & 2v \\ -v & u - 2v \end{bmatrix}, \quad \text{cu } u \in \mathbb{Z}, v \in \mathbb{Z}. \text{ Se notează } \begin{bmatrix} u + 2v & 2v \\ -v & u - 2v \end{bmatrix} = A(u, v).$$

a) Să se demonstreze că operațiile de adunare și înmulțire pentru numerele reale, respectiv pentru matrice, definesc pe E , respectiv M , structuri de inel cu element unitate.

b) Fie $(u', v'), (u'', v'')$ două cupluri de numere întregi. Să se demonstreze că dacă există o infinitate de cupluri distincte (α, β) de numere reale cu proprietatea $\alpha A(u', v') + \beta A(u'', v'') = O_M$ (unde O_M este elementul neutru pentru adunarea în M), atunci $u'v'' - u''v' = 0$ și reciproc.

c) Să se demonstreze că aplicația $\varphi: E \rightarrow M$ definită prin

$$\varphi(a + b\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} a + 2b & 2b \\ -b & a - 2b \end{bmatrix}$$

este un izomorfism de inele. Să se deducă de aici și din faptul că E este inel comutativ și fără divizori ai lui zero că M este de asemenea inel comutativ și fără divizori ai lui zero. Să se demonstreze și direct aceste proprietăți ale lui M , plecînd de la calculul produsului $A(u', v') \cdot A(u'', v'')$.

(Academia militară, București, 1971)

XIII. 65. În mulțimea C a numerelor complexe se definește legea de compunere internă $\odot$ prin $(x_1 + ix_2) \odot (y_1 + iy_2) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + ix_2y_2$, cu $x_i, y_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2$.

a) Să se arate că legea $\odot$ este comutativă și asociativă.

b) Să se arate că există un element neutru față de $\odot$. Să se determine toate elementele care au un simetric, și să se calculeze acest simetric.

c) Definind în C încă o lege de compunere internă $\oplus$ prin $(x_1 + ix_2) \oplus (y_1 + iy_2) = x_1 + y_1 + i(x_2 + y_2)$, să se arate că $(C, \oplus, \odot)$ este un inel. Este acest inel chiar un corp?

(Facultatea de matematică-mecanică, Cluj-Napoca, 1975)

XIII. 66. Se notează cu M mulțimea matricelor 2×2 din R .

Fie $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ și matricea fixă $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ astfel că $a + d = -1, ad - bc = -2$.

a) Se consideră mulțimea $E = \{\alpha A + \beta I \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$. Să se demonstreze că E este un subspațiu vectorial din M și să se precizeze dimensiunea sa.

b) Să se arate că matricea A este matrice regulată.

c) Să se verifice relația $A^2 = -A + 2I$ și să se arate că matricea A^{-1} , inversa lui A , aparține lui E .

d) Să se arate că produsul a două elemente din E aparțin lui E . Să se precizeze structura mulțimii E înzestrată cu adunarea și înmulțirea matricelor.

e) Să se arate că ecuația $X^2 = X$ are 4 soluții în mulțimea E .

(Journal de mathématiques élémentaires, 1971)

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

CAPITOLUL I

I.1. $A = \{22, 10, 6\}$, $B = \{22, -47, -8, 13\}$; I.2. $x_1 = \frac{k-3}{2} \in \mathbb{N}$, $x_2 = \frac{k+2}{3} \in \mathbb{N}$, $x_1 + x_2 = \frac{5(k-1)}{6} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow k-1 = 6l$, $l \in \mathbb{N} \Rightarrow M = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3l-1\}$, sau $x = 2l+1$, $l \in \mathbb{N}$; I.3. $x_1 + x_2 = m(m-1)$, $x_1 x_2 = (m+3)^2$; $m \in [-1, 0]$; I.4. $A \cap B \Rightarrow \frac{2n+1}{2n-3} = \frac{3k+1}{3k-2} \Rightarrow n = 2k + \frac{1}{6} \notin \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow A \cap B = \emptyset$; I.5. $\alpha \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow x = \alpha + 1 + \frac{6}{2\alpha+3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha = 0$, $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$; $m, n \in \mathbb{Z}$, m, n prime între ele $\Rightarrow x = 3 + \frac{m(2m-n)}{n(2m+3n)} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (2m-n)$ divizibil prin $n \Rightarrow n$ divizor al lui 2 $\Rightarrow \alpha = 0$, $x = 3$, $M \cap \mathbb{Z} = \{3\}$; I.6. $A \cap B$ este formată din elementele $x = y \Rightarrow 5m-2 = 503-3n \Rightarrow m = 101 - \frac{3n}{5} \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 5p$, $m = 101 - 3p$, ($p = 1, 2, \dots, 33$); I.7. $A \cap B \Rightarrow x = 3k+2 = 4l+503 \Rightarrow k = 167 + \frac{4l}{3} \in \mathbb{N} \Rightarrow l = 3p \in \mathbb{N} \Rightarrow A \cap B = \{x \mid x = 12p - 503 = 0, p \in \mathbb{N}\}$ etc.; I.8. $A = A_1 \cup A_2$ cu $A_1 = \{x \mid 2x - m + 10 = 0, m \in \mathbb{N}\}$, $A_2 = \{x \mid x - 3m + 31 = 0, m \in \mathbb{N}\}$, $A \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$ etc.; I.9. $A = \emptyset$, $B = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4} \right\}$; I.10. $X = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $Y = \{1, 4, 5, 6\}$, sau $X = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $Y = \{1, 2, 4, 5, 6\}$; I.11. $A = \{1, 4, 5, 7, 8, 9\}$, $B = \{2, 4, 5, 7, 10\}$; I.12. $X = \{1, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$, $Y = \{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$, $Z = \{3, 5, 8, 9, 10, 11\}$; I.13. $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{2, 3, 5\}$, $A_3 = \{2, 5, 6\}$, $A_4 = \{2, 4\}$; I.14. $A_1 = \{1, 2, 4, 7\}$, $A_2 = \{3, 5, 6, 7, 8\}$, $A_3 = \{2, 3, 5, 6\}$; I.15. Se folosesc formulele lui De Morgan $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ și $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, distributivitatea intersecției (reuniunii) față de reuniune (intersecție) și $B_i \supset B_{i+1} \Rightarrow \overline{B_{i+1}} \supset \overline{B_i}$, $\overline{B_i} \cup \overline{B_{i+1}} = \overline{B_{i+1}}$, $\overline{B_i} \cap \overline{B_{i+1}} = \overline{B_i}$; $E_1 = A \cup \overline{B_n}$, $E_2 = A \cap \overline{B_1} \Rightarrow E_1 \setminus E_2 = (A \cup \overline{B_n}) \cap (A \cap \overline{B_1}) = A \cap \overline{B_n} \cap (A \cap \overline{B_1}) = (\overline{A} \cap A) \cap (\overline{B_n} \cap \overline{B_1}) = \emptyset \cap (\overline{B_n} \cap \overline{B_1}) = \emptyset \Rightarrow E_1 \subset E_2$; I.16. (p, p) , (p, r) , (q, p) , (q, q) , (q, r) , (r, p) , (r, r) ; I.17. $\{(1, 4), (2, 5), (6, 9), (11, 14)\} \subset P$; I.18. Din $(2) \Rightarrow B \setminus A =$

$= \{1, 5, 7\}$, $A \setminus B = \{6, 8, 9\}$ și folosind (1) $\Rightarrow A = \{2, 3, 6, 8, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$;
I. 19. Mulțimea $M_1 \cap M_2$ se obține rezolvând sistemul.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3x - 4y \\ 2xy = 4x + 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-3) = y(y-4) \\ x(y-4) = -y(x-3) \end{cases} \Leftrightarrow (x^2 + y^2)(x-3)(y-4) = 0$$

$M \{z = x^2 + y^2 \mid (x, y) \in M_1 \cap M_2\} = \{0, 25\}$; I. 20. a) $B = \{(a, b) \mid a = 2p + 1, b = 2p - 1, p = n + 1, n \in \mathbb{N}\}$, b) $X = \{(x, y) \mid x = 2k + 1, y = 2k - 1, k \in \mathbb{Z} \cap (-\infty, 1]\}$, c) $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$; I. 21. Se folosește $(A \times B) \cup (A \times C) = A \times (B \cup C)$ și $A_i \subset A_{i-1} \Rightarrow (A_{i-1} \setminus A_i) \cup A_i = A_{i-1}$; I. 22. a) $\overline{A} = p + q, \overline{B} = n - q$; b) $\overline{A} = 3, \overline{B} = 5$, sau $\overline{A} = 5, \overline{B} = 3$; I. 23. $A = [3, 6], B = \{3, 4, 5\}$; a) $X_1 = \{6, 7, 8, 9\}, X_2 = \{3, 6, 7, 8, 9\}, X_3 = \{4, 6, 7, 8, 9\}, X_4 = \{5, 6, 7, 8, 9\}, X_5 = \{3, 4, 6, 7, 8, 9\}, X_6 = \{3, 5, 6, 7, 8, 9\}, X_7 = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}, X_8 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; b) $Y = \{-3, -2, 2, 3\}, Y_1 = \{3\}, Y_2 = \{-2, 3\}, Y_3 = \{-3, 3\}, Y_4 = \{2, 3\}, Y_5 = \{-2, -2, 3\}, Y_6 = \{-3, 2, 3\}, Y_7 = \{-2, 2, 3\}, Y_8 = \{-3, -2, 2, 3\}$ I. 24. a) Relația $\mathcal{R}$ este reflexivă simetrică și tranzitivă: $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + a) = (y_1 - y_2)(y_1 + y_2 + b)$ și $(x_2 - x_3)(x_2 + x_3 + a) = (y_2 - y_3)(y_2 + y_3 + b) \Rightarrow$ (prin adunare, membru cu membru) și $(x_1 - x_3)(x_1 + x_3 + a) = (y_1 - y_3)(y_1 + y_3 + b)$; b) Clasele de echivalență mod $\mathcal{R}$ sunt definite de cuplurile (x', y') echivalente cu un cuplu (x, y) dat:

$$x'^2 - y'^2 + ax' - by' = x^2 - y^2 + ax - by = k$$

și deci

$$C_{(x,y)} = \{(x', y') \mid x'^2 - y'^2 + ax' - by' = k\}_{k=x^2-y^2+ax-by, (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}}$$

I. 25. Pentru verificarea tranzitivității se scriu logaritmi într-o aceeași bază, de exemplu 10.

I. 26. Clasele de echivalență sunt date de $\cos^2 a = \cos^2 b \Rightarrow \mathcal{C} = \{(b + 2k\pi, b + (2k + 1)\pi) \mid b \in \mathbb{R}\}$ I. 27. a) $P(E) = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$; b) Se folosește metoda inducției matematice. I. 28. Relația $\mathcal{R}$ este reflexivă, tranzitivă și antisimetrică $(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2)$ și $(x_2, y_2) \mathcal{R} (x_1, y_1) \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$; $\mathcal{R}$ este o relație de ordine totală; I. 29.

a) $f(x_1) - f(x_2) = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 x_2 + 1)}{x_1 x_2} = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2, x_1 = -\frac{1}{x_2} \Rightarrow f$ nu este injectivă;

b) Pentru orice $y \in \mathbb{R}$ există $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ astfel ca $y = x - \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4}}{2} \in$

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$; I. 30. Aplicația f este injectivă $[f(x_1) - f(x_2)] = \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2$ și surjectivă [din $y = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow x = -\frac{y+1}{y-1}$, adică pentru orice

$y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, există $x = -\frac{y+1}{y-1} \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$]; deci f este bijectivă și $f^{-1} =$

$= -\frac{x+1}{x-1} = -\frac{1}{f}$; I. 31. a) $f^2(x) = a^2x + ab + b, f^3(x) = a^2x + a^2b + ab + b, \dots,$

$f^n(x) = a^n x + a^{n-1}b + a^{n-2}b + \dots + ab + b$ (se demonstrează prin inducție matematică); b) $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$; I. 32. $a = -1, b = \frac{3}{2}$; I. 33. a) $A \cap B = \{c \mid c =$

$= 6n + 1, n \in \mathbb{N}\}$, b) $f = \frac{3a-1}{2}$ (nu este unică: dacă p este o permutare oarecare a lui A

și g o permutare a lui B , funcția compusă $g \circ f \circ p: A \rightarrow B$ este de asemenea o aplicație biunivocă a lui A pe B); mulțimile A și B sunt echivalente;

$$c) \varphi_k = \frac{3a + 6k - 1}{2}, k \in \mathbb{N};$$

$$d) \psi_k = \begin{cases} b \in B \text{ pentru } a = 2n + 1, n \leq k \in \mathbb{N}, \\ \frac{3a - 6k - 1}{2}, a = 2n + 1, n > k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad e) A' = \{3, 5, \dots, 2k + 1\}, B' = \{4,$$

$7, \dots, 3k + 1\}$; I. 34. a) Pentru $y_1 \neq y_2, (x_1, x_1 y_1) = (x_2, x_2 y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$; b) $f(E) = = E \Leftrightarrow x = 1$ sau $x = -1$.

CAPITOLUL II

II. 1. Se scrie $37 = 45 - 8, 53 = 45 + 8, X = n \cdot 45^{n-1}(45 - 8) \cdot (45 + 8) - 8 \cdot$
 $\cdot (45 + 8) \cdot (45^{n-1} - 8^{n-1})$. II. 2. 4 900. II. 3. $2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$ sau $2 \cdot 5^5 \cdot 7^3$. II. 4. $\frac{2964}{5}$. II. 5. Se

arată că $n^6 + 34n^4 + 6n^3 + 19n^2 + 12n = [(n-1)n(n+1)]^2 + 36n^4 + 6n(n+1)(n+2)$ este divizibil prin 36. II. 6. Frația $\frac{3(n+1)^2 - 1}{n(n+1)(n+2)}$ conține la numitor factorii 2

și 3. II. 7. $N_x = ax^3 + bx^2 + bx + a \equiv (px + q)^3 \Rightarrow N_x = 1331, x > 3$. II. 9. Se scrie $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ pentru $k = 1, 2, \dots, n$ și se obțin n egalități care adunate

membru cu membru rezultă egalitatea cerută; II. 10. $(2k-1)^2 = (2k)^2 - 2(2k) + 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (2k-1)^2 - (2k)^2 = 1 - 4k$; pentru $n = 2m$ se dau lui k valorile $1, 2, \dots, m$ și se

adună membru cu membru cele m egalități: $1^2 - 2^2 + \dots + (-1)^{n-1}n^2 = m - 2m(m+1) =$
 $= \frac{n(n+1)}{2}$; pentru $n = 2m + 1$ se dau lui k valorile $1, 2, \dots, m$ și se mai scrie

egalitatea $(2m+1)^2 = (2m+1)^2$, apoi se adună membru cu membru cele $2m+1$ egalități: $1^2 - 2^2 + \dots + (-1)^{n-1}n^2 = m - 2m(m+1) + (2m+1)^2 = -m(2m+1) +$
 $+ (2m+1)^2 = \frac{n-1}{2} \cdot n + n^2 = \frac{n(n+1)}{2}$; II. 13. Se folosesc inegalitățile: $\frac{a^2 + b^2}{a + b} \geq$

$\geq 2(a + b), \frac{a+b}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right), \forall a, b \in \mathbb{R}_+$; II. 14. Se folosește $\frac{1+a}{2} \geq \sqrt{a}$,

$\forall a \in \mathbb{R}$. II. 15. Se folosește $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$ și $a > |b - c|$; II. 16. a) Din $a + b = 1$ rezultă

$ab \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ și $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ (vezi problema II.10 rezolvată).

b) Analog din $a + b + c = 1$ rezultă $abc \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$ și $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{9} +$

$+\frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$, iar din $(a + b + c)^2 = 1 \Rightarrow ab + bc + ac \leq \frac{1}{3}$; II. 17. a, b) Se folosește

metoda inducției, c) înlocuind $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$ din (1) se obține $(1 + a)^n \geq 1 + na$ pentru $a \geq 0$, iar din (2) se obține: $(1 - a)^n > 1 - na$ pentru $0 < a < 1$ sau schimbând a în $-a$: $(1 + a)^n > 1 + na$ pentru $-1 < a < 0$; II. 18. Se folosește inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz (problema II. 14, rezolvată) în care

se pune $a_1 = \sqrt{\frac{a}{x}}$, $a_2 = \sqrt{\frac{b}{y}}$, $a_3 = \sqrt{\frac{c}{z}}$, $b_1 = \sqrt{\frac{x}{a}}$, $b_2 = \sqrt{\frac{y}{b}}$, $b_3 = \sqrt{\frac{z}{c}}$;

II. 19. $\sqrt{3 - \sqrt{5}} \cdot (\sqrt[3]{1 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{7 + 3\sqrt{5}}) = \sqrt[3]{72 - 32\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{72 + 32\sqrt{5}} = 2$; II. 20. Se folosește formula $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$, unde $C = \sqrt{A^2 - B}$; II. 21. Se înlocuiește $\sqrt{7 \pm 4\sqrt{3}} = 2 \pm \sqrt{3}$; se notează $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}} = x$ și se ridică la cub, $20 + 3\sqrt[3]{100 - 108 \cdot x} = x^3 \Rightarrow x^3 + 6x - 20 = 0 \Rightarrow x = 2$; II. 22. Se folosește formula $(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 + 3ab(a \pm b) - 10(ab)^2(a \pm b)$, în care se pune $a = \sqrt[5]{44\sqrt{3} + 76}$, $b = \sqrt[5]{44\sqrt{3} - 76}$. Notînd $a - b = x$ se obține ecuația $x^5 - 10x^3 + 20x - 152 = 0$ cu rădăcina reală $x = 2$; II. 23. Se folosește $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$, $C = \sqrt{A^2 - B}$; $\sqrt{6 \pm 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} \pm 1$, $\sqrt{8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}} = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} + 1$ etc.; $n = 6$; II. 24. $x = 2$, $y = 3$, $z = 5$; II. 25. Se aplică formula $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$, $C = \sqrt{A^2 - B}$; II. 26. Se notează $\sqrt{x} = a\sqrt{2}$, $\sqrt{y} = b\sqrt{3}$, cu a, b numere raționale; se ridică la cub și se rezolvă sistemul $2a^3 + 9ab^2 = 34$, $2a^2b + b^3 = 9$, făcînd substituția $a = bt \Rightarrow 18t^3 - 68t^2 + 81t - 34 = 0 \Rightarrow t = 2$, $b = 1$, $a = 2$; II. 27. $\sqrt{a \pm 2\sqrt{a-1}} = \sqrt{(a-1) \pm 2\sqrt{a-1} + 1} = |a-1 \pm 1|$; $E = 2$ pentru $a \in [1, 2]$; $E = 2\sqrt{a-1}$ pentru $a \in (2, +\infty)$; II. 28. Se ridică ambii membri la cub; $y^3 = x^3 - 3x + 3y \Rightarrow (y-x)(y^2 + xy + x^2 - 3) = 0 \Rightarrow y = x > 2$ rațional și $y^2 + xy + x^2 - 3 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{-x \pm \sqrt{12 - 3x^2}}{2}$ complexe, deoarece $x > 2$; II. 29. Ridicînd la cub, obținem ecuația $y^3 + 3(x-4)y - 6x + 16 = 0 \Rightarrow y^3 - 8 + 3(x-4)y - 6(x-4) = 0 \Rightarrow (y-2)(y^2 + 2y + 3x - 8) = 0 \Rightarrow y = 2$, $\forall x > 3$ și $y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{9 - 3x}$ complexe pentru $x > 3$; II. 30. $\frac{9\sqrt{3} + 5\sqrt{5} + \sqrt{7 - 2\sqrt{105}}}{59}$;

II. 31. $\frac{41\sqrt{10} + 31\sqrt{14} + 29\sqrt{15} - 19\sqrt{21}}{1678}$; II. 32. $-\sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$; II. 33. $x\sqrt{y} + y\sqrt{x} - \sqrt{xy(x+y)}$; II. 34. $\frac{\sqrt{x-y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}$; II. 35. Se folosește identitatea $\alpha^5 + \beta^5 = (\alpha + \beta)(\alpha^4 - \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^3 + \beta^4)$; se obține $a(\sqrt[5]{x^4} - \sqrt[5]{x^3y} + \sqrt[5]{x^2y^2} - \sqrt[5]{xy^3} + \sqrt[5]{y^4})$; II. 36. Se folosește identitatea $(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB+BC+CA) = A^3+B^3+C^3+3ABC$ și se procedează ca la problema II. 22, rezolvată; se obține $(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{z^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{yz} + \sqrt[3]{zx}) \cdot (x+y+z)^2 - 3(x+y+z)\sqrt[3]{xyz} + 9\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$; II. 37. Fie $m = \text{c.m.m.m.c.}[p, q]$; atunci $\left(\frac{1}{x^p}\right)^m - \left(\frac{1}{y^q}\right)^m = \left(\frac{1}{x^p} - \frac{1}{y^q}\right) \cdot \left(\frac{m-1}{x^p} + \frac{m-2}{x^p} \cdot \frac{1}{y^q} + \frac{m-3}{x^p} \cdot \frac{2}{y^q} + \dots + \frac{1}{x^p} \cdot \frac{m-2}{y^q} + \frac{m-1}{y^q}\right)$ etc. II. 38. Se extrag rădăcinile cubice: $\sqrt[3]{46\sqrt{2} + 29\sqrt{5}} = 2\sqrt{2} + \sqrt{5}$, $\sqrt[3]{18\sqrt{3} \pm 14\sqrt{5}} = \sqrt{3} \pm \sqrt{5}$, $\sqrt[3]{36\sqrt{3} - 38\sqrt{2}} = 2\sqrt{3} - \sqrt{2}$, $\sqrt[3]{17\sqrt{2} - 11\sqrt{5}} = \sqrt{2} - \sqrt{5}$

și $E = 5 + 2\sqrt{6}$, sau se amplifică fracția cu conjugatul numitorului; II. 39. $N_1 + N_2 = (\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3 + 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot [(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 3\sqrt{ab}] + 2\sqrt{ab}$, $N_1 \cdot N_2 = \sqrt{ab}[(\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3] + ab(\sqrt{ab} + 1) = \sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot [(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 3\sqrt{ab}] + ab(\sqrt{ab} + 1)$; a) Înlocuind $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 3$, $\sqrt{ab} = 1$, obținem $N_1 + N_2 = N_1 \cdot N_2 = 20$; b). Dacă $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ și $\sqrt{ab}$ sînt numere raționale, atunci din expresiile pentru $N_1 + N_2$ și $N_1 \cdot N_2$, rezultă că și aceste numere sînt raționale; c) Necesitatea: presupunem $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ numere raționale $\Rightarrow N_1, N_2$ raționale. Suficiența: presupunem N_1, N_2 raționale $\Rightarrow N_1 - N_2 = a\sqrt{a} - b\sqrt{b}$, rațional $\Rightarrow \sqrt{a}, \sqrt{b}$ raționale; II. 40. Se ridică E_2 la puterea a 4-a: $E_2^4 = a^2b$, $E_2 \Rightarrow E_2 = \sqrt[4]{a^2b}$; se ridică E_3 la puterea a 27-a: $E_3^{27} = a^9b^3cE_3 \Rightarrow E_3 = \sqrt[26]{a^9b^3c}$; se ridică E_n la puterea n^n : $E_n^{n^n} = a_1^{n^{n-1}} a_2^{n^{n-2}} \dots a_n E_n \Rightarrow E_n = \sqrt[n^{n-1}]{a_1^{n^{n-1}} a_2^{n^{n-2}} \dots a_n}$; altă metodă: se notează $a\sqrt{b} = x$, $E_2 = \sqrt{x \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{16}} \dots} = x^{\frac{2}{2(1-\frac{1}{4})}} = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2b}$; se notează $a\sqrt[3]{b\sqrt{c}} = y$, $E_3 = \sqrt[y \cdot y^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{9}} \dots]{} = \sqrt[9]{y^{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}}} = y^{\frac{9}{26}} = \sqrt[26]{a^9b^3c}$; se notează $a_1 \cdot \sqrt[n]{a_2 \cdot \sqrt[n]{a_3 \dots \sqrt[n]{a_n}}} = z$, $E_n = \sqrt[n]{z \cdot z^{\frac{1}{n}} \cdot z^{\frac{1}{n^2}} \dots} = z^{\frac{n}{n^{n-1}}} = \sqrt[n^{n-1}]{z^{n^{n-1}}} = \sqrt[n^{n-1}]{a_1^{n^{n-1}} \cdot a_2^{n^{n-2}} \dots a_{n-1}^n \cdot a_n}$.

CAPITOLUL III

III. 1. $m = 4$, $x = -\frac{7}{2}$; III. 2. $(2m+1)x + m - 1 = 0$, $x = \frac{1-m}{2m+1}$ pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$; pentru $m = -\frac{1}{2}$ ecuația este imposibilă; III. 3. 1; III. 4. $3\sqrt{a}$; III. 5. -4; 8; III. 6. 1; 3; III. 7. -2; 0; III. 8. Se descompune în factori membrul stîng al ecuației $t(xyz - 4xy - 3xz - 2yz + 12x + 8y + 6z - 24) - 5 \cdot (xyz - 4xy - 3xz - 2yz + 12x + 8y + 6z - 24) = (xyz - 4xy - 3xz - 2yz + 12x + 8y + 6z - 24) \cdot (t-5) - 120 = (xyz - 4xy - 3xz - 2yz + 12x + 8y + 6z - 24) \cdot (t-5) - 120$ etc.; se obține $(x-2)(y-3)(z-4)(t-5) = 1$ cu $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$; mulțimea soluțiilor acestei ecuații este: $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8\}$ cu $s_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $s_2 = \{1, 2, 5, 6\}$, $s_3 = \{1, 4, 3, 6\}$, $s_4 = \{1, 4, 5, 4\}$, $s_5 = \{3, 2, 3, 6\}$, $s_6 = \{3, 2, 5, 4\}$, $s_7 = \{3, 4, 3, 4\}$, $s_8 = \{3, 4, 5, 6\}$; III. 9. $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, $x = -\frac{m}{m+2}$, $m = -2 \Rightarrow 0 \cdot x = -8$ (ecuația este imposibilă), $m = 2 \Rightarrow 0 \cdot x = 0$ (ecuația este nedeterminată); III. 10. $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 1, 3\}$, $x = -\frac{1}{m+3}$, $m = -3 \Rightarrow 0 \cdot x = 2$ (ecuația este imposibilă), $m = 1 \Rightarrow 0 \cdot x = 0$ (ecuația este nedeterminată); III. 11. $m \in \mathbb{R} \setminus \{-a, a\}$, $x = -\frac{2}{m+a}$, $m = -a \neq 0 \Rightarrow 0 \cdot x = 4a$ (ecuația este imposibilă), $m = -a = 0 \Rightarrow 0 \cdot x = 0$ (ecuația este nedeterminată); $m = -a \Rightarrow 0 \cdot x = 0$ (ecuația

este nedeterminată); III. 12. $x = -\frac{m+2}{m}$ pentru $m \in (-\infty, 0)$, $x = -\frac{m}{m-2}$ pentru $m \in (2, +\infty)$; III. 13. $x = \frac{7m-9}{2(m-1)}$ pentru $m \in (1, \frac{5}{3})$, $x = \frac{7m-13}{2(m-2)}$ pentru $m \in (-\infty, \frac{5}{3}) \cup (\frac{7}{3}, +\infty)$, $x = \frac{13m-17}{2(m-1)}$ pentru $m \in (-\infty, 1) \cup (\frac{7}{3}, +\infty)$, $x = 2$ pentru $m = \frac{5}{3}$, $x = 5$ pentru $m = \frac{7}{3}$; III. 14. $x = \frac{4m+3}{m+13}$ pentru $m \in (-13, 1)$, $x = \frac{6m-1}{5(m+1)}$ pentru $m \in (1, 6)$, $x = \frac{19}{m+13}$ pentru $m \in (-\frac{20}{3}, 6)$, $x = \frac{6m-1}{m-7}$ pentru $m \in (-\infty, -\frac{20}{3}) \cup (7, +\infty)$, $x = \frac{1}{2}$ pentru $m = 1$, $x = 1$ pentru $m = 6$, $x = 3$ pentru $m = -\frac{20}{3}$; III. 15. 1, 3, 5; III. 16. $-\frac{34}{5}$, $-\frac{31}{5}$, $-\frac{28}{5}$, -5 ; III. 17. $\frac{5x-4}{3} = t \in Z \Rightarrow x = \frac{3t+4}{5}$, $\left[\frac{2t+1}{5}\right] + \left[\frac{4t+7}{10}\right] = t$, $t_1 = \left[\frac{2t+1}{5}\right]$, $t_2 = \left[\frac{4t+7}{10}\right]$, $t_1 + t_2 = t$, $t_1 \leq \frac{2t+1}{5} < t_1 + 1$, $t_2 \leq \frac{4t+7}{10} < t_2 + 1 \Rightarrow t \leq \frac{2t+1}{5} + \frac{4t+7}{10} < t+2 \Rightarrow t = -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$, din care numai $t = 0, 1, 2$ verifică ecuația $\left[\frac{2t+1}{5}\right] + \left[\frac{4t+7}{10}\right] = t \Rightarrow x = \frac{4}{5}, \frac{7}{5}, 2$; III. 18. $E_1 < 0$ pentru $x \in (-\infty, -2) \cup (1, 5)$, $E_1 > 0$ pentru $x \in (-2, 1) \cup (5, +\infty)$, $E_1 = 0$ pentru $x \in \{-2, 1, 5\}$; $E_2 < 0$ pentru $x \in (-\infty, -\frac{3}{5}) \cup (-\frac{1}{3}, \frac{3}{5}) \cup (2, +\infty)$, $E_2 > 0$ pentru $x \in (-\frac{3}{5}, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{3}{5}, 2)$, $E_2 = 0$ pentru $x \in \{-\frac{1}{3}, 2\}$; $E_3 < 0$ pentru $x \in (-\infty, \frac{5}{2}) \cup (\frac{7}{2}, +\infty)$, $E_3 > 0$ pentru $x \in (\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$, $E_3 = 0$ pentru $x \in \{\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\}$; III. 19. $x \in [\frac{4}{3}, 3] \cup (\frac{10}{3}, +\infty)$; III. 20. $x \in (-\infty, -3) \cup [\frac{1}{3}, \frac{3}{2}] \cup (3, \frac{7}{2})$; III. 21. $x \in (\frac{7}{5}, 5)$; III. 22. $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$; III. 23. $x \in (1, 2) \cup (2, \frac{5}{2})$; III. 24. Inecuația este echivalentă cu următoarele sisteme:

$$\begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ y \geq 0 \\ y \leq 2x+3 \end{cases}; \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ y < 0 \\ -y \leq 2x+3 \end{cases}; \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -2x+1 \end{cases}; \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ y < 0 \\ -y \leq -2x+1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ y \geq 0 \\ y \leq 2x+1 \end{cases}; \begin{cases} 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ y < 0 \\ -y \leq 2x+1 \end{cases}; \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ y \geq 0 \\ y \leq -2x+3 \end{cases}; \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ y < 0 \\ -y \leq -2x+3 \end{cases};$$

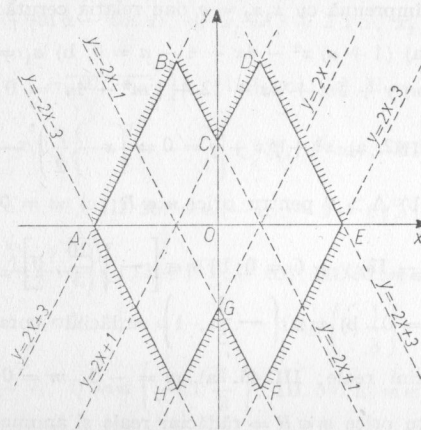


Fig. III. 24.

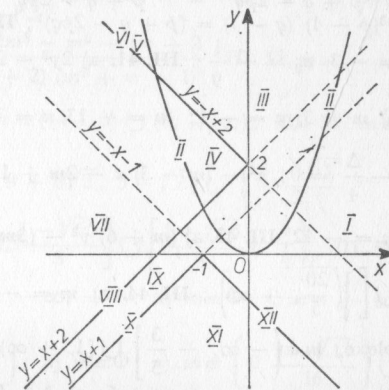


Fig. III. 25.

Punctele (x, y) care verifică aceste sisteme se află în interiorul conturului poligonal ABCDEFGH (inclusiv laturile) (fig. III. 24); III. 25. Se reprezintă grafic curbele $x + 1 + y = 0$ (cu $x \geq -1$), $-x - 1 + y = 0$ (cu $x < -1$), $x + y - 2 = 0$ (cu $y \geq 2$), $x - y + 2 = 0$ (cu $y < 2$), $x^2 - y = 0$. Există următoarele cazuri (fig. III. 25):

Regiunea	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
$ x+1 +y$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	-	0
$x+ y-2 $	+	+	+	-	+	0	-	0	+	+	+	+
x^2-y	+	0	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+
$(x+1 +y)(x+ y-2)$	+	+	-	+	+	0	-	0	+	0	-	0

III. 26. $1, 2a - 5$; III. 27. $-2, 2a^2$; III. 28. $x_1 = 1, x_2 = \frac{a+b}{a-b}$; III. 29. $-4, -2, 1$;

III. 30. $-7, \frac{-3-\sqrt{177}}{6}$; III. 31. $2-\sqrt{2}$; III. 32. $m = 0, n = \frac{1}{4}$; $m = 7, n = 2$;

III. 33. $m = -\frac{3}{2}; x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1; x'_1 = \frac{1}{2}, x'_2 = \frac{8}{3}$; III. 34. $m^2 + mn + 3n =$

$= 0$; $x_1 = m$, $x_2 = -m - n - \frac{2n}{m}$; $x'_1 = m$, $x'_2 = 1 - m - n$; **III. 35.** $m \in \left[1, -\frac{1}{5} \right]$; **III. 36.** $m \in \left(-\infty, \frac{7}{8} \right]$; **III. 37.** a) $\frac{2}{5}$; b) $\frac{3 \pm 2\sqrt{5}}{5}$; **III. 38.** $(2a - b)^2 = a(a - b + c)$; **III. 39.** Din relația dată împreună cu $x_1 + x_2 = -p$ se obține $x_1 = \frac{p^2(q-1)}{p+q-2pq}$, $x_2 = \frac{pq(p-1)}{p+q-2pq}$, care împreună cu $x_1 x_2 = q$ dau relația cerută: $p^3(p-1)(q-1) = (p+q-2pq)^2$; **III. 40.** a) $(1+a)x^2 - 4x + 4 - a = 0$, b) $a_1 = -3$, $a_2 = -\frac{1}{9}$; **III. 41.** a) $2y^2 - 2(5+m)y + 5m + 2n + 12 + \sqrt{m^2 - 4n} = 0$; b) $m = 3$, $n = -4$; $m = -13$, $n = 36$; **III. 42.** a) $x^2 + px + q = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4} = 0$; $x^2 - (m-3)x - 2m + 1 = 0$; b) $\Delta > 0$ pentru orice $m \in \mathbb{R}$; c) $m = 0$, $m = -12$; **III. 43.** a) $(m+6)y^2 - (3m^2 + m - 12)y + 6 = 0$; b) $m \in \left[-\sqrt{\frac{20}{3}}, 0 \right] \cup \left[\sqrt{\frac{20}{3}}, +\infty \right)$; **III. 44.** a) $m = -1$, $m = 0$; b) $m \in \left(-\frac{3}{5}, 1 \right)$ rădăcini complexe, $m \in \left(-\infty, -\frac{3}{5} \right] \cup [1, +\infty)$ rădăcini reale; **III. 45.** a) $m = -5$, $m = 0$; b) $x_1 = m + 1$, $x_2 = m + 6$; c) $\Delta > 0$ pentru orice $m \in \mathbb{R} \Rightarrow$ rădăcini reale și anume: $m \in (-\infty, -6)$, $x_1 < x_2 < 0$; $m = -6$, $x_1 = 0$, $x_2 < 0$; $m \in \left(-6, -\frac{7}{2} \right)$, $x_1 < 0 < x_2$, $|x_1| > x_2$; $m = -\frac{7}{2}$, $x_1 = -x_2$; $m \in \left(-\frac{7}{2}, -1 \right)$, $x_1 < 0 < x_2$, $|x_1| < x_2$, $m = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 > 0$; $m \in (-1, +\infty)$, $0 < x_1 < x_2$; **III. 46.** a) $m \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{7}}{4} \right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{7}}{4}, +\infty \right)$, b) $m \in \left(-1, \frac{1-\sqrt{6}}{5} \right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{6}}{5}, 1 \right)$; **III. 47.** a) $m \in (-\infty, 0] \cup [8, +\infty)$; b) $m \in \left[\frac{1}{2}, +\infty \right)$; **III. 48.** a) $x_1 x_2 = 6 - \frac{6}{m+1} \geq 0 \Rightarrow m \geq 0$, $x_1 + x_2 = m + \frac{6}{m+1} \geq 0$; din $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ și $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{6}{m+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow m+1 \in \{1, 2, 3, 6\} \Rightarrow m \in \{0, 1, 2, 5\}$; pentru $m = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 6$; pentru $m = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$; pentru $m = 2$, $x_1 = x_2 = 2$; pentru $m = 5$, $x_1 = 1$, $x_2 = 5$; b) $m = \pm 2, \pm 3$; **III. 49.** a) $ny^2 + (m^2 - 4n)y - m^2 + 4n = 0$; b) $\Delta = m^2(m^2 - 4n) = 0 \Rightarrow m = 0$, $m = \pm 2\sqrt{n}$, $P = S = \frac{4n - m^2}{n} = 0 \Rightarrow m = \pm 2\sqrt{n}$. Există următoarele cazuri: $n < 0$, $m \neq 0 \Rightarrow 0 < y_1 < y_2$; $n < 0$, $m = 0 \Rightarrow 0 < y_1 = y_2$; $n = 0 \Rightarrow y = 1$ (ecuație de gradul întâi); $n > 0$, $m \in (-\infty, -2\sqrt{n}) \cup (2\sqrt{n}, +\infty) \Rightarrow y_1 < 0 < y_2$, $|y_1| > y_2$; $n > 0$, $m \in (-2\sqrt{n}, 0) \cup (0, 2\sqrt{n}) \Rightarrow$ rădăcini complexe $n > 0$, $m = \pm 2\sqrt{n} \Rightarrow y_1 = y_2 = 0$; $n > 0$, $m = 0 \Rightarrow y_1 = y_2 = 2$; **III. 50.** a) $\Delta = 0$, $m = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$; b) $E = \frac{18(m^2 - 5m - 6)}{(2 - m)^3}$, c) $m \in (-1, 2) \cup (6, +\infty)$; **III. 51.** a) $\Delta =$

$= \left(1 + \frac{1}{mn}\right)^2 \geq 0$ pentru orice $m, n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; b) $P = -\left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1\right) = -1$; c) $x_1 = 1 + \frac{2}{\sin 2\alpha} \cdot (1 + \sin \alpha + \cos \alpha)$, $x_2 = -1 - \frac{2}{\sin 2\alpha} \cdot (1 - \sin \alpha - \cos \alpha)$; d) $x_1 = 3 + 2\sqrt{3}$, $x_2 = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}$; **III. 52.** a) $\Delta = 1 > 0$; b) $m \in \left(-\infty, -\frac{3}{2} \right) \cup (1, +\infty)$; c) $E = \frac{m^4 + 2m^3 - m^2 - 2m + 2}{m(m+2)(m^2 + m - 1)}$; **III. 53.** $m \in (-\infty, -6) \cup \left(-\frac{7}{6}, -\frac{2}{3} \right] \cup [3, +\infty)$; **III. 54.** $m \in (-1, 3) \cup (8, +\infty)$; **III. 55.** $m \in (0, 1)$; **III. 56.** $m \in (-\infty, -9 - 6\sqrt{2}) \cup (-9 + 6\sqrt{2}, 3 - \sqrt{7}) \cup \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) \cup (3 + \sqrt{7}, +\infty)$; **III. 57.** $m \in \left(-1, \frac{1 - \sqrt{65}}{8} \right] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{65}}{8}, \frac{5}{4} \right)$, **III. 58.** a) $m \in \Phi$; b) $m \in (-\infty, -1) \cup \left(0, \frac{1}{8} \right)$; c) $m \in (-\infty, -1)$; d) $m \in \Phi$; e) $m \in (-\infty, -1)$; f) $m \in \left(-1, \frac{1}{8} \right)$; **III. 59.** a) $m \in \left(0, \frac{1}{2} \right)$; b) $m \in \Phi$; c) $m \in \left(0, \frac{9 - \sqrt{17}}{16} \right) \cup \left(\frac{3}{4}, \frac{9 + \sqrt{17}}{16} \right)$; **III. 60.** $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $x = (-1)^k \arcsin \frac{1 + \sqrt{5 - 4m}}{4} + k\pi$ cu $m \in \left(-1, \frac{5}{4} \right]$, $x = (-1)^k \arcsin \frac{1 + \sqrt{5 - 4m}}{4} + k\pi$ cu $m \in \left[-5, \frac{5}{4} \right]$, $k \in \mathbb{Z}$; **III. 61.** $x_1 = k\pi$, $x_{2,3} = \pm \arccos \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 8m + 8}}{4(m-1)} + 2k\pi$ pentru $m \in \left(-\infty, \frac{1}{3} \right) \cup [1, 4 - 2\sqrt{2}) \cup [4 + 2\sqrt{2}, +\infty)$, $x_2 = \pm \arccos \frac{-m + \sqrt{m^2 - 8m + 8}}{4(m-1)} + 2k\pi$ pentru $m \in \left(\frac{1}{3}, 1 \right)$, $k \in \mathbb{Z}$; **III. 62.** $x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{m} + k\pi$ pentru $m \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, $x = (-1)^k \arcsin (2m - 1) + k\pi$ pentru $m \in (0, 1]$, $k \in \mathbb{Z}$; **III. 63.** $x_1 = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi$ pentru orice $m \in \mathbb{R}$, $x_2 = \frac{m - 1}{2(m + 1)}$ pentru $m \in (-\infty, -3) \cup \left[-\frac{1}{3}, +\infty \right)$; **III. 64.** Fie $f(x) = (m^2 - 3)x^2 - 6x - m^2 + 1$ și x_1, x_2 rădăcinile primei ecuații; trebuie ca $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, și împreună cu relațiile dintre rădăcinile și coeficienții primei ecuații, dă: $-(m^2 - 1)(2m^2 - 11)(3m^2 + 1) < 0 \Rightarrow m \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{11}{2}} \right) \cup (-1, 1) \cup \left(\sqrt{\frac{11}{2}}, +\infty \right)$; **III. 65.** a) $\Delta = x^2 + 4y$, $P = \frac{-x + y - 1}{x + y - 1}$, $S = -\frac{2(y + 1)}{x + y - 1}$. Se reprezintă grafic curbele $x^2 + 4y = 0$, $-x + y - 1 = 0$, $x + y - 1 = 0$, $y + 1 = 0$ (fig. III. 65). Avem:

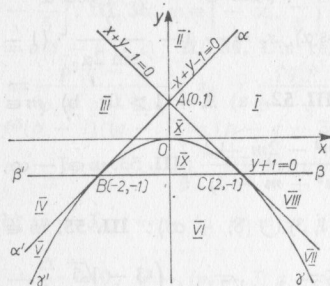


Fig. III.65

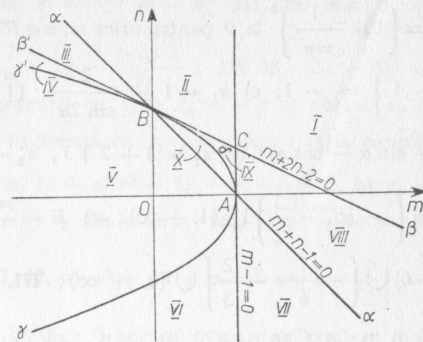


Fig. III.66

Regiunea	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	(Aα)	(AB)	(Bα')	(Bβ')	(BC)	(Cβ)	(γ'B)	(BOC)
Δ	+	+	+	+	+	-	+	+	-	+	+	+	+	+	-	+	0	0
P	-	+	-	-	+	+	+	-	+	+	0	0	0	-	+	-	+	+
S	-	-	+	-	-	-	-	+	+	+	-	+	-	0	0	0	-	+

(Cγ)	{B}	{C}
0	0	0
+	0	0
-	0	0

Pentru punctele de pe dreapta $x + y - 1 = 0$ ecuația este de gradul întâi; **III. 66.** $\Delta = n^2 + m - 1$, $P = \frac{m + 2n - 2}{m - 1}$, $S = -\frac{2(m + n - 1)}{m - 1}$. Se reprezintă grafic curbele $n^2 + m - 1 = 0$, $m + 2n - 2 = 0$, $m - 1 = 0$, $m + n - 1 = 0$ (fig. III. 66) și se ține seama de tabela următoare:

Regiunea	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	(Bγ') ∪ (Aγ)	(BδA)	(Bα')	(BA)	(Aα)	(Bβ')	(BC)	(Cβ)
Δ	+	+	+	+	-	+	+	+	+	-	0	0	+	-	+	+	+	+
P	+	-	-	+	+	+	-	-	+	+	+	+	-	+	-	0	0	0
S	-	+	-	-	-	+	-	-	+	+	-	+	0	0	0	-	+	-

Pentru punctele de pe dreapta $m - 1 = 0$ ecuația este de gradul întâi; **III. 67.** $m \in (-\infty, 7 - 3\sqrt{5}) \cup (7 + 3\sqrt{5}, +\infty)$; **III. 68.** $m \in (1, +\infty)$; **III. 69.** $m \in (-10 - 4\sqrt{5}, -10 + 4\sqrt{5})$; **III. 70.** $m \in (-\infty, 7 - 3\sqrt{5})$; **III. 71.** $m \in (9 - 2\sqrt{30}, -7 + 2\sqrt{10})$; **III. 72.** Pentru $m \in (2, +\infty)$, $x \in \left(-\infty, -\frac{3m+5}{2(m-2)}\right) \cup \left(\frac{3m}{4}, +\infty\right)$, pentru $m \in (-\infty, 2)$, $x \in \left(-\frac{3m+5}{2(m-2)}, \frac{3m}{4}\right)$, iar pentru $m = 2$, $x \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$; **III. 73.** Pentru $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, $x \in (6a, -4a)$, pentru $m \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $x \in (-\infty, 6a) \cup (-4a, +\infty)$, pentru $m \in (0, +\infty)$, $x \in (-\infty, -4a) \cup (6a, +\infty)$, iar pentru $m = 0$, $x \in R$; **III. 74.** $m \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{5}{3}, 2\right)$, $x \in \left(\frac{m-1-\sqrt{3m^2-8m+5}}{m^2-3m+2}, \frac{m-1+\sqrt{3m^2-8m+5}}{m^2-3m+2}\right)$, pentru $m \in (-2, 1) \cup (2, +\infty)$, $x \in \left(-\infty, \frac{m-1-\sqrt{3m^2-8m+5}}{m^2-3m+2}\right) \cup \left(\frac{m-1+\sqrt{3m^2-8m+5}}{m^2-3m+2}, +\infty\right)$, iar pentru $m = 2$, $x \in (-\infty, -2)$; **III. 75.** $m \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup (1, +\infty)$; **III. 76.** $a \in \left(-\infty, -\frac{7}{5}\right)$, 4 răd. complexe; $a \in \left(-\frac{7}{5}, +\infty\right)$, 4 răd. reale; $a = -3$, 2 răd. duble, complexe; $a = -\frac{7}{5}$, 2 răd. duble, reale; $a = -1$, $x_{1,2} = 0$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$; **III. 77.** a) Se împarte ecuația la x^2 și se notează $x + \frac{1}{x} = y$; $x_{1,2} = \frac{1 + 2\sqrt{1-p} \pm \sqrt{-4p + 11 + 4\sqrt{1-p}}}{4}$, $x_{3,4} = \frac{1 - 2\sqrt{1-p} \pm \sqrt{-4p - 11 - 4\sqrt{1-p}}}{4}$, b) $p \in \left(-\infty, -\frac{21}{4}\right)$; **III. 78.** a) $n \in (-\infty, -1)$: $m \in (-\infty, -\sqrt{n^2-1})$, 4 răd. reale, $m = -\sqrt{n^2-1}$, 2 răd. duble reale; $m \in (-\sqrt{n^2-1}, \sqrt{n^2-1}) \cup (\sqrt{n^2-1}, +\infty)$, 4 răd. complexe, $m = \sqrt{n^2-1}$, 2 răd. duble complexe; b) $n = -1$: $m \in (-\infty, 0)$, 4 răd. reale ($x_1 = x_2 = 0$); $m = 0$, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, $m \in (0, +\infty)$, 2 răd. complexe, $x_1 = x_2 = 0$; c) $n \in (-1, 1)$: $m \in (-\infty, +\infty)$, 2 răd. reale, 2 răd. complexe; d) $n = 1$: $m \in (-\infty, 0)$, 2 răd. complexe, $x_1 = x_2 = 0$, $m = 0$, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, $m \in (0, +\infty)$, 4 răd. reale ($x_1 = x_2 = 0$); e) $n \in (1, +\infty)$: $m \in (-\infty, -\sqrt{n^2-1})$, 2 răd. reale, 2 răd. complexe $m = -\sqrt{n^2-1}$, 2 răd. duble complexe, $m \in (-\sqrt{n^2-1}, \sqrt{n^2-1})$, 4 răd. complexe, $m = \sqrt{n^2-1}$, 2 răd. duble complexe, $m \in (\sqrt{n^2-1}, +\infty)$, 4 răd. reale; **III. 79.** $1, 2, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, $1 \pm i\sqrt{3}$; **III. 80.** $\pm 1 + \sqrt{3}$, $\pm 2 + \sqrt{3}$; **III. 81.** $0, \frac{-9 \pm i\sqrt{15}}{6}$; **III. 82.** $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; **III. 83.** $1, 1, \frac{-1 \pm i\sqrt{15}}{2}$; **III. 84.** $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $\frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$; **III. 85.** $-1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}$; **III. 86.** a) $(x + p + 1)(x + p - 1)$; $f(x) < 0$ pentru $x \in [-p - 1, -p + 1]$ și pozitivă în rest; $F = (-1, +\infty)$; b) $f(x) = (x + p)^2 - 1$, $f(x)$ este strict descrescătoare pentru $x \in (-\infty, -p - 1)$; c) $\sum_{k=1}^n f(3k) =$

$= \sum_{k=1}^n (9k^2 + 6k)$; **III. 87.** $\lambda \in \left(1, \frac{4 + 2\sqrt{7}}{3}\right)$. **III. 88.** a) $x = \frac{y + 5 \pm \sqrt{-3y^2 + 6y + 33}}{2}$,
 $y \in [1 - 2\sqrt{3}, 1 + 2\sqrt{3}]$; $y = \frac{x - 1 \pm \sqrt{-3x^2 + 18x + 9}}{2}$ $x \in [3 - 2\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3}]$;
b) $y_{\min} = 1 \pm \sqrt{3}$ pentru $x = 3 \pm 2\sqrt{3}$; $x_{\min} = 3 \pm \sqrt{3}$ pentru $y = 1 \pm 2\sqrt{3}$;
III. 89. $f_m\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$, $f_M\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{2}{3}$; **III. 90.** $f_M\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{4}\right) = -1 - \frac{2}{\sqrt{5}}$,
 $f_m\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{4}\right) = -1 + \frac{2}{\sqrt{5}}$; **III. 91.** $f_m(1) = -1$; **III. 92.** $y = \frac{x + 1 + a^2}{a\sqrt{x+1}} \Rightarrow x^2 +$
 $+(2 + 2a^2 - a^2y^2)x + 1 + a^4 + 2a^2 - a^2y^2 = 0 \Rightarrow \Delta \geq 0 \Rightarrow a^4y^2(y^2 - 4) \geq 0 \Rightarrow y_{\min} =$
 $= 2, x_{\min} = a^2 - 1$; **III. 93.** $f(x) = -10x^2 + 60x - 81$; **III. 94.** Avem ecuația $x^2(1 -$
 $-y) - x(1 + by) + a(1 - y) - y = 0$, $x_{\text{extrem}} = \frac{1 + by}{2(1 - y)} \Rightarrow y_1 = \frac{3}{2 - b}$, $y_2 =$
 $= \frac{7}{10 + 3b}$ care trebuie să verifice ecuația $\Delta = y^2(b^2 - 4a - 4) + 2y(b + 4a + 2) +$
 $+ 1 - 4a = 0$; se obține sistemul: $(b + 1)(b - ab - a - 2) = 0$, $(b + 1) \cdot (25b -$
 $- 9ab - 9a + 46) = 0$ cu soluția $b = -1$ (care dă o singură valoare pentru $x_{\text{extrem}} =$
 $= \frac{1}{2}$ și deci nu convine) și $b = -4$, $a = 2$; **III. 95.** $a = 10$, $b = 3$; **III. 96.** (1) $x^2(a -$
 $- y) + x(b - cy) + 4 - dy = 0$, $x_{\text{extrem}} = \frac{cy - b}{2(a - y)} \Rightarrow 1 = \frac{3c - b}{2(a - 3)}$, $0 = \frac{2c - b}{2(a - 2)} \Rightarrow$
 $\Rightarrow b = 4a - 12$, $c = 2a - 6$, care împreună cu $y = 3$, $y = 2$ dau din (1): $x^2(a - 3) -$
 $- 2x(a - 3) + 4 - 3d = 0 \Rightarrow \Delta = (a - 3)(a + 3d - 7) = 0$ și $x^2(a - 2) + 4 - 2d =$
 $= 0 \Rightarrow \Delta = (a - 2)(4 - 2d) = 0$; se obține $a = 1$, $b = -8$, $c = -4$, $d = 2$; **III. 97.**
 $m \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$ două puncte de extrem, $m = 1$ sau $m = 4$, un punct de ex-
trem, $m \in (1, 4)$ nici un punct de extrem; **III. 98.** a) $m \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup (1, +\infty)$ două
puncte de extrem, $m = \frac{1}{4}$ sau $m = 1$ un punct de extrem, $m \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)$ nici un punct
de extrem; b) $y_{\max} = 10 + 6\sqrt{3}$, $y_{\min} = 10 - 6\sqrt{3}$; **III. 100.** a) $x_v = \frac{m + 2}{m - 1}$, $y_v =$
 $= -\frac{9m}{m - 1}$; pentru minim $m - 1 > 0 \Rightarrow m > 1$ adică $\frac{x_v + 2}{x_v - 1} > 1 \Rightarrow x_m \geq 1$, $\frac{y_v}{y_v + 9} >$
 $> 1 \Rightarrow y_m \leq -9$, b) $(1, -9)$; **III. 101.** $|\overline{AB}| = |x_2 - x_1| = \left|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right| = 6$, $x_v = -$
 $-\frac{b}{2a} = 1 \Rightarrow a = 1$, $b = 2$; **III. 102.** a) Există simultan relațiile: $0 < x_v < 1$, $0 <$
 $< y_v < 1$, $y_v < x_v \Rightarrow m \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$; b) $x_v = y_v \Rightarrow m = \frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$;
III. 103. a) Parabola este tangentă axei $Ox \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow m = 2$, $A(-2, 0)$;
b) virful parabolei se află pe $Oy \Rightarrow x_v = 0 \Rightarrow m = 0$, $B(0, 4)$; c) Se face translația
de axe $x = x' - 2$, $y = y' + 4$; noua origine este $O'(-2, 4)$. Se constată ușor că
parabola de la punctul a) este identică cu parabola de la punctul b) raportată la noul
sistem de axe $x'O'y'$; punctele O și O' sînt simetrice față de mijlocul segmentului AB

și deci parabolele sînt simetrice față de mijlocul segmentului AB ; d) Familia de para-
bole trece prin punctele fixe $(-2, 0)$ și $(0, 4)$; **III. 104.** a) $x_{v_g} = \frac{p + 1}{2}$, $y_{v_g} =$
 $= \frac{15 - 2p - 5p^2}{4}$, $h\left(\frac{p + 1}{2}\right) = y_{v_g} \Rightarrow p_1 = 1$, $p_2 = 3$.

CAPITOLUL IV

IV. 1. $x = \frac{a(a + b)}{5a - b}$, $y = \frac{a(a - b)}{5a - b}$ cu $5a - b \neq 0$; **IV. 2.** $x = \frac{a^2b}{a^2 - b^2}$, $y = \frac{ab^2}{a^2 - b^2}$,
 $a \neq b$; **IV. 3.** Se notează $\frac{1}{x} = u$; $x = \frac{3 - m}{2}$, $y = \frac{(m - 1)^2}{(m + 1)(m - 3)}$ cu $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1,$
 $3\}$; **IV. 4.** Se notează $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$ și se scrie sistemul echivalent care se obține
prin adunarea și scăderea ecuațiilor membru cu membru: $x = 2$, $y = 2$; **IV. 5.** $x = 4$,
 $y = 3$; **IV. 6.** $x \in [2, +\infty)$, $y = 2 - x$; **IV. 7.** $x = \frac{37}{5}$, $y = \frac{3}{10}$; $x = -9$, $y = \frac{1}{2}$;
 $x = 1$, $y = -\frac{9}{2}$; **IV. 8.** $x = -a - 5$, $y = 6$, $a \in (-3, 0)$; $x = -2$, $y = 6$, $a = -3$; $x =$
 $= a + 1$, $y = 6$, $a \in (-3, -1)$; $x = \frac{a + 1}{3}$, $y = \frac{16 - 2a}{3}$, $a \in \left(-1, \frac{7}{2}\right)$; $x = \frac{3}{2}$, $y = 3$,
 $a = \frac{7}{2}$; $x = 5 - a$, $y = 2a - 4$, $a \in \left(0, \frac{7}{2}\right)$; $x = a - 5$, $y = 6 - 2a$, $a \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$;
 $x = -\frac{7}{2}$, $y = 3$, $a = \frac{3}{2}$; $x = -\frac{a}{3} - 3$, $y = \frac{2a}{3} + 2$, $a \in \left(-3, \frac{3}{2}\right)$; $x = -2$,
 $y = 0$, $a = -3$; $x = -a - 5$, $y = 2a + 6$, $a \in (-5, -3)$; $x = 0$, $y =$
 $a = -5$; $x = a + 5$, $y = -4$, $a \in (-5, 0)$; $x = -5$, $y = -4$, $a = 0$, $x =$
 $= -5$, $y = 6$, $a = 0$; **IV. 9.** $x = \frac{a + 5}{3}$, $y = \frac{2a + 7}{3}$, $a \in \left[0, \frac{1}{4}\right)$; $x = \frac{7}{4}$, $y = \frac{5}{2}$;
 $a = \frac{1}{4}$; $x = \frac{9 - a}{5}$, $y = \frac{13 - 2a}{5}$, $a \in \left[0, \frac{1}{4}\right)$; $x = \frac{a - 7}{3}$, $y = \frac{2a + 1}{3}$, $a \in$
 $\in \left[0, \frac{13}{4}\right)$; $x = -\frac{5}{4}$, $y = \frac{5}{2}$, $a = \frac{13}{4}$; $x = -\frac{a + 3}{5}$, $y = \frac{19 - 2a}{5}$, $a \in \left[0, \frac{13}{4}\right)$;
IV. 10. $x = 1$, $y = 1$; **IV. 11.** $x = -3$, $y = 1$; $x = -1$, $y = 3$; $x = 1$, $y = 5$;
IV. 12. $a = -\frac{29}{6}$, $b = \frac{1}{3}$; **IV. 13.** Pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ sistemul admite soluția unică
 $x = \frac{m}{1 - 2m}$, $y = \frac{1 - m}{1 - 2m}$; pentru $m = \frac{1}{2}$ sistemul este imposibil; **IV. 14.** Pentru
 $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ sistemul admite soluția unică $x = \frac{1}{m - 1}$, $y = -\frac{1}{m - 1}$; pentru
 $m = 1$ sistemul este nedeterminat: $x = 1 - y$; **IV. 15.** Pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}, 2\right\}$, siste-

mul admite soluția unică $x = \frac{2}{3m-2}$, $y = -\frac{1}{3m-2}$; pentru $m = \frac{2}{3}$ sistemul este imposibil; pentru $m = 2$ sistemul este nedeterminat: $x = 1 + 2y$, $x \in R$; IV. 16. Pentru $m \in R \setminus \left\{ \frac{1}{3}, 3 \right\}$, sistemul admite soluția unică $x = \frac{m-7}{m-3}$, $y = \frac{4}{m-3}$; pentru $m = \frac{1}{3}$ sistemul este nedeterminat: $x = 4 + y$; pentru $m = 3$ sistemul este imposibil; IV. 17. Pentru $m \in [0, +\infty)$ sistemul este compatibil cu soluțiile: $x = m + 1$, $y = -1$; $x = \frac{-m^2 + 3m + 1}{2m + 1}$, $y = -\frac{5m + 1}{2m + 1}$, iar pentru $m \in (-\infty, 0)$ sistemul este imposibil; IV. 18. Pentru $m \in (2, +\infty)$ sistemul admite soluțiile $x = \frac{m+4}{m}$, $y = \frac{-m^2 - m + 4}{m}$; $x = \frac{4-m}{m}$, $y = \frac{m^2 - 3m + 4}{m}$; pentru $m \in (-\infty, 2]$ sistemul este imposibil; IV. 19. Sistemul este nedeterminat dacă ecuațiile au coeficienții proporționali; rezultă $a = -3$, $b = 1$; IV. 20. a) Pentru $m \in R \setminus \{-2, -1\}$ sistemul admite soluția unică $x = \frac{m-1}{m+2}$, $y = \frac{m-2}{m+1}$; pentru $m = -2$, $m = -1$ sistemul este imposibil; b) $m \in (-2, -1) \cup [1, 2]$; c) $x = 1 - \frac{3}{m+2} \in Z$ pentru $m \in \{-5, -3, -1, 1\}$, $y = 1 - \frac{3}{m+1} \in Z$ pentru $m \in \{-4, -2, 0, 2\}$; IV. 21. a) Pentru $m \in R \setminus \{-1, 4\}$ sistemul admite soluția unică $x = \frac{3m-4}{m^2-3m-4}$, $y = -\frac{m(m+8)}{m^2-3m-4}$; pentru $m = -1$, $m = 4$ sistemul este imposibil; b) $x \geq 0$, $y \geq 0$ pentru $m \in [-8, -1) \cup (0, 4)$; c) $x + y = 0 \Rightarrow m = -4 \Rightarrow$ sistemul este compatibil cu soluția $x = -\frac{2}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, iar pentru $m \in R \setminus \{4\}$ sistemul este incompatibil; IV. 22. Pentru $m \in R \setminus \{-1, 0\}$ sistemul admite soluția unică $x = \frac{3(m-2)}{m+1}$, $y = \frac{5m^2+2m+6}{m(m+1)}$; pentru $m = -1$ și $m = 0$, sistemul este imposibil; b) $x = 3 - \frac{9}{m+1} \in Z$ dacă $m+1$ este un divizor al lui 9; se obține $m = -2$, $x = 12$, $y = 11$; $m = 2$, $x = 0$, $y = 5$; c) $m = -\frac{6}{5}$, sistemul este compatibil: $x = 48$, $y = 45$; $m = 6$, sistemul este compatibil: $x = \frac{12}{7}$, $y = \frac{33}{7}$; $m \in R \setminus \left\{ -\frac{6}{5}, 6 \right\}$, sistemul este incompatibil; IV. 23. $m = \frac{13}{5}$, $x = -8$, $y = -5$; IV. 24. $m = -23$, $x = 8$, $y = 5$; IV. 25. $m = \frac{3}{2}$, $x = \frac{5}{2}$, $y = 1$; $m = 2$, $x = \frac{8}{3}$, $y = \frac{2}{3}$; IV. 26. $m = 0$, $x = -1$, $y = 0$; $m = \frac{7}{5}$, $x = -\frac{1}{8}$, $y = -\frac{21}{40}$; IV. 27. $m = 0$, $n = 0$, $x = 1$; $y = 1$; IV. 28. $m = \frac{12}{11}$, $n = 2$, $x = \frac{11}{4}$,

$y = -\frac{1}{2}$; IV. 29. Pentru punctele de pe parabola $n = 4m^2 + 4$, sistemul este compatibil cu soluția $x = 3m + 1$, $y = m - 1$; pentru celelalte puncte din plan sistemul este incompatibil; IV. 30. $x = 2$, $y = 1$; $x = -1$, $y = 0$; IV. 31. $x = 3$, $y = 2$; $x = \frac{73 + \sqrt{73}}{36}$, $y = \frac{61 + \sqrt{73}}{48}$; $x = \frac{25 + \sqrt{73}}{12}$, $y = \frac{29 + \sqrt{73}}{16}$; $x = \frac{7}{3}$, $y = 2$; IV. 32. $x = a + 1$, $y = 1$, $a \in (0, +\infty)$; $x = -a - 1$, $y = -1$, $a \in (0, +\infty)$; $x = \sqrt{1-a^2}$, $y = \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$, $a \in (0, 1)$; $x = -\sqrt{1-a^2}$, $y = -\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$, $a \in (0, 1)$; $x = -\sqrt{3(a^2-1)}$, $y = \sqrt{\frac{3(a+1)}{a-1}}$, $a \in (1, +\infty)$; $x = \sqrt{3(a^2-1)}$, $y = -\sqrt{\frac{3(a+1)}{a-1}}$, $a \in (1, +\infty)$; IV. 33. $a \in (0, +\infty)$, $x = 2a$, $y = a$; IV. 34. Se notează $x - y = u$ și prin adunarea ecuațiilor se obține: $u^2 + u - 2 = 0$; $x = 4$, $y = 3$; $x = -3$, $y = -4$; $x = 3$, $y = 5$; $x = -5$, $y = -3$; IV. 35. Ecuația a doua se scrie: $(y-2)(x-y-2) = 0$; $x = 2$, $y = 2$; $x = -\frac{1}{2}$, $y = 2$; $x = \frac{8 \pm \sqrt{70}}{3}$, $y = \frac{2 \pm \sqrt{70}}{3}$; IV. 36. Se înmulțește ecuația a doua cu -2 și se adună la prima; $x = 0$, $y = \frac{9 \pm \sqrt{33}}{2}$; $x = 2(-3 \pm \sqrt{33})$, $y = \frac{3(-3 \pm \sqrt{33})}{4}$; IV. 37. $x = 1$, $y = -7$; $x = 4$, $y = 5$; IV. 38. $x = \pm 1$, $y = \pm \frac{1}{2}$; $x = \pm \frac{3}{\sqrt{7}}$, $y = \pm \frac{1}{\sqrt{7}}$; IV. 39. $x = \pm \sqrt{2}$, $y = \pm \sqrt{2}$; $x = \pm \frac{4}{5} \sqrt{\frac{20}{19}}$, $y = \mp \sqrt{\frac{20}{19}}$; IV. 40. $x = \pm \sqrt{6}$, $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{4}$; $x = \pm \frac{5}{2}$, $y = \pm \frac{1}{2}$; IV. 41. $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$; $x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$, $y = \mp \frac{1}{\sqrt{5}}$; IV. 42. $x = 4$, $y = 6$; IV. 43. a) $x = \frac{3m \pm \sqrt{9m^2 - 8m}}{2}$, $y = \frac{4 - 3m^2 \mp \sqrt{9m^2 - 8m}}{2}$; b) Se discută simultan ecuațiile $x^2 - 3mx + 2m = 0$, $(m-1)y^2 + (3m^2 - 4)y + 2m^2 - 4m - 4 = 0$; $m \in \left(-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $x_1 < 0 < x_2$, $y_1 < 0 < y_2$; $m \in \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 1 - \sqrt{3}\right)$, $x_1 < 0 < x_2$, $y_1 < 0 < y_2$; $m \in (1 - \sqrt{3}, 0)$, $x_1 < 0 < x_2$, $y_1 < y_2 < 0$; $m \in \left(0, \frac{8}{9}\right) \Rightarrow$ rădăcini complexe; $m \in \left(\frac{8}{9}, 1\right)$, $0 < x_1 < x_2$, $y_1 < y_2 < 0$; $m \in \left(1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $0 < x_1 < x_2$, $y_1 < 0 < y_2$; $m \in \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 1 + \sqrt{3}\right)$, $0 < x_1 < x_2$, $y_1 < 0 < y_2$; $m \in (1 + \sqrt{3}, +\infty)$, $0 < x_1 < x_2$, $y_1 < y_2 < 0$; $m = 0$, $x_1 = x_2 = 0$, $y_1 = y_2 = -2$; $m = \frac{8}{9}$, $x_1 = x_2 = \frac{3}{4}$, $y_1 = y_2 = \frac{22}{3}$; IV. 44. a) $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = y_2 = a + 1$; $x_{3,4} = \frac{a-1 \pm \sqrt{(a-1)(a+3)}}{2}$, $y_{3,4} = \frac{a-1 \mp \sqrt{(a-1)(a+3)}}{2}$; b) $x_i \leq 0$, $y_i \leq$

≤ 0 ($i = 1, 2, 3, 4$) pentru $a \in (-\infty, -3]$; **IV. 45.** a) $x_{1,2} = \frac{15m \pm \sqrt{84 - 75m^2}}{6}$,
 $y_{1,2} = \frac{15m \mp \sqrt{84 - 75m^2}}{6}$; b) $m \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{7}}{5}\right] \cup \left(0, \frac{\sqrt{7}}{5}\right]$; c) $m \in \left[\frac{\sqrt{7}}{5}, \frac{2\sqrt{7}}{5}\right]$;
IV. 46. a) $x_{1,2} = \frac{m + \sqrt{3m^2 + 5m + 2}}{2m + 1}$, $y_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{-4m - 3 + 2\sqrt{3m^2 + 5m + 2}}}{2m + 1}$, $x_{3,4} =$
 $= \frac{m - \sqrt{3m^2 + 5m + 2}}{2m + 1}$, $y_{3,4} = \frac{\pm \sqrt{-4m - 3 - 2\sqrt{3m^2 + 5m + 2}}}{2m + 1}$; b) x și y satisfac
ecuațiile: $(2m + 1)x^2 - 2mx - m - 2 = 0$, $(2m + 1)y^4 + 2(4m + 3)y^2 + 1 = 0$;
pentru $m \in (-\infty, -1)$ - soluții reale; pentru $m \in \left(-1, -\frac{2}{3}\right)$ - soluții complexe;
pentru $m \in \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, x_i - reale, y_i - complexe; pentru
 $m = -1$, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$, $y_1 = y_2 = -y_3 = -y_4 = 1$; pentru $m = -\frac{2}{3}$,
 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2$, $y_1 = y_2 = -y_3 = -y_4 = i \cdot \sqrt{3}$; pentru $m = -\frac{1}{2}$, $x_1 = x_2 =$
 $= \frac{3}{2}$, $y_1 = -y_2 = i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $m = -\frac{2}{3}$, $x = 2$, $y = \pm i\sqrt{3}$; $m = -\frac{14}{39}$, $x =$
 $= -4$, $y = i\sqrt{39}$; **IV. 47.** a) $x_1 = 2m + 1$, $y_1 = 2m - n - 1$; $x_2 = m + n - 1$, $y_2 =$
 $= m - 1$; $x_3 = \frac{4m - n - 1}{2}$, $y_3 = \frac{4m - n + 1}{2}$; $x_4 = \frac{2m + n - 1}{2}$, $y_4 =$
 $= \frac{2m + n + 1}{2}$; b) $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$ pentru $m \in \mathbb{Z}$, $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$; c) $x - y = n + 2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x_i > y_i$ ($i = 1, 2$) pentru $n \in (-2, +\infty)$, $x - y = -1 \Rightarrow x_i < y_i$ ($i = 3, 4$); d) $0 <$
 $< x < y \Rightarrow x + y > 0$, $x - y < 0 \Rightarrow m \in (1, +\infty)$, $n \in (-2m, -2)$; e) pentru
 $m = -1$, $n = 1$ sistemul este compatibil cu soluțiile $(-1, 0)$, $(-1, -4)$, $(-3, -2)$,
 $(1, -2)$; **IV. 48.** a) $x = 0$, $y = 0$. Pentru $x \neq 0$, $y \neq 0$ se desfac parantezele și se
împart ecuațiile prin xy și respectiv x^2y^2 ; se notează $x + \frac{1}{x} = u$, $y + \frac{1}{y} = v$; se
obține: $x_{1,2} = \frac{a + \sqrt{10 - a^2} \pm \sqrt{6 + 2a \cdot \sqrt{10 - a^2}}}{2}$, $y_{1,2} = \frac{a - \sqrt{10 - a^2} \pm \sqrt{6 - 2a \cdot \sqrt{10 - a^2}}}{2}$,
 $x_{3,4} = \frac{a + \sqrt{10 - a^2} \pm \sqrt{6 + 2a \sqrt{10 - a^2}}}{2}$, $y_{3,4} = \frac{a - \sqrt{10 - a^2} \mp \sqrt{6 - 2a \sqrt{10 - a^2}}}{2}$,
 $x_{5,6} = \frac{a - \sqrt{10 - a^2} \pm \sqrt{6 - 2a \sqrt{10 - a^2}}}{2}$, $y_{5,6} = \frac{a + \sqrt{10 - a^2} \pm \sqrt{6 + 2a \sqrt{10 - a^2}}}{2}$,
 $x_{7,8} = \frac{a - \sqrt{10 - a^2} \pm \sqrt{6 - 2a \sqrt{10 - a^2}}}{2}$, $y_{7,8} = \frac{a + \sqrt{10 - a^2} \pm \sqrt{6 + 2a \sqrt{10 - a^2}}}{2}$;
b) $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ pentru $a \in [-\sqrt{10}, -3] \cup [-1, 1] \cup [3, \sqrt{10}]$; c) $x_{1,2} = y_{1,2} = x_{5,6} =$
 $= y_{5,6} = \frac{\pm \sqrt{10} \pm \sqrt{6}}{2}$ pentru $a = \pm \sqrt{10}$; **IV. 49.** Se notează $\sqrt{x^2 - 2ay - 22} = u$,

$\sqrt{x + 2y} = v$; se obține $x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 64a + 124}}{2}$, $y_{1,2} = \frac{32 - a \mp \sqrt{a^2 + 64a + 124}}{2}$;
b) Se obțin ecuațiile $x^2 + ax - 16a - 31 = 0$ și $4y^2 - 2(a + 32)y + 225 = 0$; $x_{1,2} \geq$
 ≥ 0 , $y_{1,2} \geq 0$ pentru $a \in \left[-2, -\frac{31}{16}\right]$; **IV. 50.** Ecuația a doua se mai scrie $\sqrt[3]{x} -$
 $-\sqrt[3]{y} = 1$; se obține $x_1 = 8$, $y_1 = 1$, $x_2 = -1$, $y_2 = -8$; **IV. 51.** $x = y = 1$; **IV. 52.**
Se adună ecuațiile: $xy + yz + zx = 11 \Rightarrow xy = 2$, $yz = 6$, $zx = 3 \Rightarrow xyz = 6 \Rightarrow x = 1$,
 $y = 2$, $z = 3$; **IV. 53.** $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right)$; $\left(\frac{7}{6}, \frac{1}{7}, \frac{7}{15}\right)$; **IV. 54.** $(-6, -5, -4)$;
 $(4, 3, 2)$; **IV. 55.** Se scrie $x^2 + (y - z)^2 = \frac{1}{2} [(x + y - z)^2 + (x - y + z)^2]$ etc.; se
notează $x + y - z = u$, $x - y + z = v$, $-x + y + z = w$ și se obține sistemul: $u^2 + v^2 =$
 $= a^2 + b^2$, $v^2 + w^2 = b^2 + c^2$, $w^2 + u^2 = c^2 + a^2 \Rightarrow u^2 + v^2 + w^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow u^2 =$
 $= a^2$, $v^2 = b^2$, $w^2 = c^2$; se obțin sistemele: $x + y - z = a$, $x - y + z = b$, $-x + y +$
 $+ z = c$ (1); $x + y - z = -a$, $x - y + z = b$, $-x + y + z = c$ (2); $x + y - z = a$,
 $x - y + z = -b$, $-x + y + z = c$ (3); $x + y - z = a$, $x - y + z = b$, $-x + y + z =$
 $= -c$ (4); $x + y - z = -a$, $x - y + z = -b$, $-x + y + z = c$ (5); $x + y - z = -a$,
 $x - y + z = b$, $-x + y + z = -c$ (6); $x + y - z = a$, $x - y + z = -b$, $-x + y +$
 $+ z = -c$ (7); $x + y - z = -a$, $x - y + z = -b$, $-x + y + z = -c$ (8), care se
rezolvă simplu adunând câte două ecuații membru cu membru.

CAPITOLUL V

V. 1. $-\frac{3}{5}, 1$; **V. 2.** $-5, -1, 9$; **V. 3.** $9, 11, 13, 15$; **V. 4.** $\frac{3x + 2}{3} = t \in \mathbb{Z} \Rightarrow x =$
 $= \frac{3t - 2}{3}$, $\left[\frac{3t - 4}{4}\right] + \left[\frac{6t - 19}{6}\right] = t \Rightarrow t \leq \frac{3t - 4}{4} + \frac{6t - 19}{6} < t + 1 \Rightarrow t = 6, 7, 8$
din care numai $t = 7$ verifică $\left[\frac{3t - 4}{4}\right] + \left[\frac{6t - 19}{6}\right] = t$; $x = \frac{19}{9}$; **V. 5.** Se împarte
ecuația cu 9^x și se notează $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$; $x = 0$; **V. 6.** $9^x \cdot \frac{8}{3} = 8x \cdot \frac{9}{\sqrt{8}} \Rightarrow \left(\frac{9}{8}\right)^x =$
 $= \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$; **V. 7.** Se notează $3^2 \sqrt{x} = t$; $x = 0$; **V. 8.** Se notează $5^{\frac{1}{2x}} = t$; $x =$
 $= \frac{1}{2}$; **V. 9.** $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = t$, $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \frac{1}{t}$; $x = \pm 1$; **V. 10.** $(2x - 3)^{x+2} \cdot (2x -$
 $- 3 + 3x + 8) = 5(x + 1)^{x+3} \Rightarrow \left(\frac{2x - 3}{x + 1}\right)^{x+2} = 1 \Rightarrow x + 2 = 0$, $x = -2$, $\frac{2x - 3}{x + 1} = 1$,
 $x = 4$; **V. 11.** $2, \frac{1}{2}$; **V. 12.** $4^{\frac{1}{x}} \cdot 9^{\frac{1}{x}} \cdot \left(9^{\frac{x-1}{x}} + 4^{\frac{x-1}{x}}\right) = 6 \cdot 35 \Rightarrow 6^{\frac{2}{x}} \cdot \left(9^{\frac{x-1}{x}} + 4^{\frac{x-1}{x}}\right) =$
 $= 6(9^{\frac{3}{2}} + 4^{\frac{3}{2}}) \Rightarrow x = 2$; **V. 13.** a) $e^{nx}(e^{2x} - 6e^x + 8) = 0$, $e^x = t$, $t^2 - 6t + 8 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t_1 = 2, t_2 = 4 \Rightarrow x_1 = \ln 2, x_2 = \ln 4$; b) $u_n = C_1 e^{n x_1} + C_2 e^{n x_2} = C_1^n \ln 2 + C_2 e^{n \ln 4} = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 2^{2n}$; constantele C_1, C_2 se determină din condițiile $u_1 = 1, u_2 = 3 \Rightarrow 2C_1 + 4C_2 = 1, 4C_1 + 16C_2 = 3 \Rightarrow C_1 = 2^{-2}, C_2 = 2^{-3}, u_n = 2^{n-2} + 2^{2n-3}$. Altfel: se observă că $u_1 = 2^{-1} + 2^{-1}, u_2 = 2^0 + 2^1, u_3 = 2^1 + 2^3$ etc.; prin inducție completă se arată că $u_n = 2^{n-2} + 2^{2n-3}$; V. 14. $2^{x+2} = t, t^2 - 2mt + 4m - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\lg(m + \sqrt{m^2 - 4m + 3})}{\lg 2} - 2, x_2 = \frac{\lg(m - \sqrt{m^2 - 4m + 3})}{\lg 2} - 2$ cu condițiile $m^2 - 4m + 3 \geq 0, m + \sqrt{m^2 - 4m + 3} > 0, m - \sqrt{m^2 - 4m + 3} > 0$; pentru $m \in \left(\frac{3}{4}, 1\right) \cup (3, +\infty)$ ecuația admite rădăcinile x_1 și x_2 ; pentru $m \in \left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$ ecuația admite rădăcina x_1 ; pentru $m = 1, x_1 = x_2 = -2$, pentru $m = 3, x_1 = x_2 = \frac{\lg 3}{\lg 2} = -2$; iar pentru $m \in (1, 3)$ ecuația nu admite soluții; V. 15. $1 - \lg 5 = \lg 2, x = 1$; V. 16. $\frac{5}{2}$; V. 17. $\frac{9}{2}$; V. 18. 8; V. 19. a) $x_{1,2} = \frac{a - 2m \pm \sqrt{a^2 - 4am}}{2}$ cu condițiile $a^2 - 4am \geq 0, x_{1,2} > 0, m + x_{1,2} > 0$; b) se rezolvă sistemele: $a^2 - 4m \geq 0, x_1 > 0, m + x_1 > 0$ (1) și $a^2 - 4am \geq 0, x_2 > 0, m + x_2 > 0$ (2). Pentru $m \in (-\infty, 0)$ ecuația admite rădăcina $x_1 = \frac{a - 2m + \sqrt{a^2 - 4am}}{2}$, pentru $m \in \left(0, \frac{a}{4}\right)$ ecuația admite rădăcinile $x_1 \neq x_2$, pentru $m = 0, x = a$, pentru $m = \frac{a}{4}, x_1 = x_2 = \frac{a}{4}$, iar pentru $m \in \left(\frac{a}{4}, +\infty\right)$ ecuația nu admite rădăcini; V. 20. a) $x_{1,2} = -2 + m \pm \sqrt{\log_m(2m^2 - 3m + 1)}$ pentru $x > -2$ și $x_{3,4} = -2 - m \pm \sqrt{\log_m(2m^2 - 3m + 1)}$ pentru $x < -2$, cu condițiile $m > 0, m \neq 1, 2m^2 - 3m + 1 > 0, \log_m(2m^2 - 3m + 1) > 0$; b) $m \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$; V. 21. a) $x_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 + \frac{1}{2}}$ dacă $0 < 2m^2 - 5m + 3 < 1, 0 < x^2 + 2mx < 1$ (1) și $x_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 + 2}$ dacă $2m^2 - 5m + 3 > 1, x^2 + 2mx > 1$ (2); b) Deoarece ecuația se reduce la $x^2 + 2mx = \frac{1}{2}$ în cazul (1) și la $x^2 + 2mx = 2$ în cazul (2), rămân condițiile (1): $0 < 2m^2 - 5m + 3 < 1 \Rightarrow m \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$ pentru care $x_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 + \frac{1}{2}}$ și (2) $2m^2 - 5m + 3 > 1 \Rightarrow m \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$ pentru care $x_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 + 2}$; V. 22. Se studiază semnul expresiilor: $9 - x^2, 8 - x^2, x^2 - x - 2, x^2 - x - 3$; se obține $x \in \left(-2\sqrt{2}, \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}, 2\sqrt{2}\right)$; V. 23. $a > 1, x \in \left[\frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}\right) \cup [1, +\infty)$; $0 < a < 1$.

$x \in (0, 1] \cup \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}\right]$; V. 24. Se înmulțesc și se împart ecuațiile; se obține sistemul $x + y = 7, x - y = -1 \Rightarrow x = 3, y = 4$; V. 25. Se obțin sistemele: $\cos x + \cos y = \sqrt{2}, \cos x \cos y = \frac{1}{2}$ (1) și $\cos x + \cos y = -\sqrt{2}, \cos x \cos y = \frac{1}{2}$ (2); din (1) rezultă $x = y = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, iar din (2) $x = y = \pm \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; V. 26. Se obține sistemul: $\sin x + \cos y = 0, \sin x \cos y = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, y = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, sau $x = -(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, y = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; V. 27. Se înlocuiește x din ecuația a doua în prima: $y(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = y^4 \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} = \pm 2$; se obțin sistemele: $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 2, y^2 = x$ (1) $y - \sqrt{y} = 2 \Rightarrow y_1 = 4, x_1 = 16$ și $\sqrt{x} - \sqrt{y} = -2, y^2 = x$ (2) $\Rightarrow y^3 - 4y^2 - 4y - 1 = 0$ care are o rădăcină irațională $y_1 \in (4, 5)$; V. 28. Vezi problema V.23 rezolvată: $x_1 = 2, y_1 = \frac{1}{2}, z_1 = 1; x_2 = \frac{\lg 2}{\lg 3}, y_2 = \frac{\lg 5}{\lg 4}, z_2 = \frac{\lg 9}{\lg 5}; x_3 = \frac{\lg 5}{\lg 3}, y_3 = \frac{\lg 9}{\lg 4}, z_3 = \frac{\lg 2}{\lg 5}$; V. 29. Se notează $2^{\frac{x-y}{4}} = t$ și se obține $t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow t_1 = -1$, (nu convine), $t_2 = 2 \Rightarrow x - y = 4$, iar din ecuația a doua $2y - x = 1 \Rightarrow x = 9, y = 5$; V. 30. Se notează $\lg x = u, \lg y = v \Rightarrow x_1 = 100, y_1 = 1000; x_2 = 1000, y_2 = 100$; V. 31. $2^x = 11 - 3^y, 85 - 4^x = 9^y$; se notează $2^x = u, 3^y = v \Rightarrow x_1 = 1, y_1 = 2; x_2 = \frac{\lg 9}{\lg 2}, y_2 = \frac{\lg 2}{\lg 3}$; V. 32. Se obține $x^2 y = a^3, xy^2 = b^3 \Rightarrow (xy)^3 = (ab)^3 \Rightarrow xy = ab \Rightarrow x = \frac{a^2}{b}, y = \frac{b^2}{a}$; V. 33. $\frac{x^2}{y} = a^2, \frac{x}{y^2} = b^2 \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^3 = a^2 b^2 \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt[3]{a^2 b^2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{a^4}{b^2}}, y = \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^4}}$; V. 34. Se logaritmează în baza e ecuațiile sistemului; se obține: $\ln x - \ln y = 0, \ln x + \ln y = 1 \Rightarrow x = y = e^{\frac{1}{2}}$; V. 35. Se obține $xy = 81, x^2 + y^2 = 738 \Rightarrow x_1 = 3, y_1 = 27; x_2 = 27, y_2 = 3$; V. 36. $x^2 y z = 16, x y^2 z = 81, x y z^2 = 256 \Rightarrow (xyz)^4 = (24)^4 \Rightarrow xyz = 24 \Rightarrow x = \frac{2}{3}, y = \frac{27}{8}, z = \frac{32}{8}$; V. 37. Vezi problema V.23, rezolvată: $x_1 = 10, y_1 = 10, z_1 = 100; x_2 = 10^{\frac{\lg 3}{\lg 2}}, y_2 = 10^{\frac{\lg 16}{\lg 3}}, z_2 = \sqrt{10}; x_3 = 10^4, y_3 = 10^{\frac{\lg 2}{\lg 3}}, z_3 = 10^{\frac{\lg 3}{\lg 4}}$.

CAPITOLUL VI

VI. 1. $(-1)^n \cdot 2$; VI. 2. $(1+i)^2 = 2i, (1-i)^2 = -2i$; se obține zero pentru $n = 2k$, sau $-2^{3n+1} \cdot i^n$ pentru $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$; VI. 3. $x = -\frac{4}{11}, y = \frac{5}{11}$; VI. 4. $x = 3, y = 4$; VI. 5. $x + iy = \frac{1}{2} \pm i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$; VI. 6. $\pm(3+4i)$; VI. 7. $\pm \frac{1}{5\sqrt{2}}(4+7i)$;

VI. 8. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot (-1+i), \frac{2+\sqrt{3}+i}{\sqrt[3]{20+12\sqrt{3}}}, \frac{2-\sqrt{3}+i}{\sqrt[3]{20+12\sqrt{3}}}$; VI. 9. $\pm \frac{1+\sqrt{2}-i}{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{1+\sqrt{2}}}$; VI. 10. $x = -2, y = \frac{3}{2}, z = 2, t = -\frac{1}{2}$; VI. 11. $z = 4 + 2i$; VI. 12. $z = 3 - 4i$; VI. 13. $\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha$; VI. 14. $\cos \alpha - i \sin \alpha$; VI. 15. $\cos\left(\frac{n\pi}{2} - n\alpha\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{2} - n\alpha\right)$; VI. 16. 2 pentru $n = 3k, k \in \mathbb{N}$; -1 pentru $n = 3k \pm 1, k \in \mathbb{N}$; VI. 17. $2\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$; VI. 18. $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$; VI. 19. $2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right]$; VI. 20. $2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2}\right)$; VI. 21. $2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right]$; VI. 22. $2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right]$; VI. 23. Se ia $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$; se obține $\frac{z^n}{1+z^{2n}} = \frac{1}{2 \cos n\theta}$; VI. 25. $S + T = z + \frac{z^7 - z}{z - 1} = \frac{\left(\cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}\right)^7 - z}{z - 1} = -1$; $S \cdot T = (z + z^2 + z^4 + z^5 + z^6) = \frac{z^7 - z}{z - 1} = -1$; $S \cdot T = (z + z^2 + z^4 + z^5 + z^6) = z^4(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6) + 2z^7 = z^4 \cdot \frac{z^7 - 1}{z - 1} + 2z^7 = -2$; VI. 26. $|z| = |z|^{n-1} \Rightarrow |z| = 0$ sau $|z| = 1$; pentru $|z| = 0 \Rightarrow z = 0$, iar pentru $|z| = 1 \Rightarrow z\bar{z} = 1$ și $z\bar{z} = z^n \Rightarrow z^n = 1$. Deci $z = 0$ și $z = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$, ($k = 0, 1, \dots, n-1$); VI. 27. $\frac{3}{4} + i$; VI. 28. $-\frac{3}{4} - i$; VI. 29. $z_1 = i - 2, z_2 = i - 3$; VI. 30. $z_1 = 4 + i, z_2 = 3 + 2i$; VI. 31. $z_1 = 2 + i, z_2 = -\frac{5+9i}{2}$; VI. 32. $z = \cos \frac{6k\pi + \pi}{9} + i \sin \frac{6k\pi + \pi}{9}, k = 0, 1, 2$ și $z = \cos \frac{6k\pi - \pi}{9} + i \sin \frac{6k\pi - \pi}{9}, k = 0, 1, 2$; VI. 33. a) $\Delta = 0 \Rightarrow m = -\frac{3}{4} + i, z_1 = z_2 = \frac{-1+2i}{2}$, b) $m = 0, z_1 = -1, z_2 = 2i$; VI. 34. a) Coroana circulară delimitată de cercurile cu centrul în origine și de raze $r_1 = 3, r_2 = 4$; b) Domeniul unghiular limitat de două semidrepte care pornesc din origine și fac cu axa reală unghiuri egale cu $\frac{\pi}{3}$ și respectiv $\frac{\pi}{2}$; c) Discul circular cu centrul $C(0, i(-1))$ și raza 2; d) Dreapta de ecuație $y = -x + 1$; VI. 35. Se obține $y(x^2 + y^2 - 1) = 0$; locul geometric este format din reuniunea mulțimilor de puncte de pe dreapta $y = 0$ și de pe cercul $x^2 + y^2 - 1 = 0$; VI. 36. Din $\frac{z - z_1}{z - z_2}$ real rezultă că vectorii $z - z_1$ și $z - z_2$ sînt paraleli și deci z se găsește pe dreapta determinată de z_1 și z_2 ; VI. 37. Condiția de coliniaritate a punctelor $A(0, i), B(x, iy), C(-y, ix)$ con-

duce la $x^2 + y^2 - x - y = 0$ [cerc de rază $\frac{\sqrt{2}}{2}$ și de centru $\left(\frac{1}{2}, i \cdot \frac{1}{2}\right)$]; VI. 38. Locul geometric este reuniunea mulțimilor de puncte de pe dreapta $x = 0$ și de pe cercul $x^2 + y^2 - 1 = 0$; VI. 39. a) Se consideră $z_k = r_k(\cos \alpha_k + i \sin \alpha_k), k = 1, 2, 3$; se obține $z = 2r_1 r_2 r_3 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) \in R$; b) Dacă z_1, z_2, z_3 sînt pe o dreaptă paralelă la axa imaginară există următoarele relații: $r_1 \cos \alpha_1 = r_2 \cos \alpha_2 = r_3 \cos \alpha_3$, deoarece vectorii $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$, au aceeași proiecție pe x' . Se obține $r_3 = r_1 \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_3}, r_2 = (-1)^k \cdot r_1 \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_3)}, k \in \mathbb{N}$; VI. 40. a) $|z_1| = |z_2| = 1, z_1 = \frac{1-m^2}{1+m^2} + i \cdot \frac{2m}{1+m^2}, z_2 = -\frac{1-m^2}{1+m^2} + i \cdot \frac{2m}{1+m^2} \Rightarrow$ punctele sînt situate pe cercul cu centrul în origine și raza 1 și sînt simetrice față de Oy ; b) Din a) rezultă $z_1 = -\bar{z}_2$ și $z_2 = -\bar{z}_1$.

CAPITOLUL VII

VII. 1. 36; 72; VII. 2. 792; VII. 3. $x = 8$; VII. 4. $x = 1$; VII. 5. $x = 23, y = 14$; VII. 6. $x = 4, y = 2$; VII. 7. a) $T_{11} = 60x^3$; b) $T_{13} = C_{13}^{12} a^6 x^{-1}$; VII. 8. $k + 1 = 10$; VII. 9. 9, 10, 11 sau 14, 15, 16; VII. 10. $n = 9, T_7 = 84$; VII. 11. $x = 10$; VII. 12. $C_m^7 < C_m^8 > C_m^9 \Rightarrow m = 16, T_3 = 1920 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot x^4 \cdot \sqrt[6]{x}$; VII. 13. $2^m = 128 \Rightarrow m = 7, T_3 = 21x^4$; VII. 14. $n = 4, T_3 = 6\sqrt[3]{x}$; VII. 15. 124; VII. 16. -120 ; VII. 17. $P = \frac{A_9^3 \cdot A_6^2}{A_{15}^5}$; VII. 18. Numărul cazurilor posibile este C_{16+12}^{5+3} , iar numărul cazurilor favorabile este $C_{16}^5 \cdot C_{12}^3$ deci $P = \frac{C_{16}^5 \cdot C_{12}^3}{C_{16+12}^{5+3}}$ (schema bilei neîntoarse). VII. 19. Numărul cazurilor posibile este C_{31}^3 . a) Numărul cazurilor favorabile este egal cu $9 \cdot 7 \cdot 5$, deoarece pentru o grupă de trei bile de culori diferite există următoarele posibilități de alegere: pentru bila albă 9 posibilități, pentru bila roșie 7 posibilități și pentru bila albastră 5 posibilități; b) Numărul cazurilor favorabile este $12C_9^2 + C_9^3$, deoarece o grupă care să conțină doar 2 bile albe se poate forma în $12C_9^2$ moduri; iar ca să conțină toate bilele albe se poate forma în C_9^3 moduri; c) numărul cazurilor favorabile este $9C_{12}^2 + 12C_9^2 + C_9^3$, deoarece o grupă care să conțină o bilă albă se poate forma în $9C_{12}^2$ moduri, ca să conțină 2 bile albe în $12C_9^2$ moduri și ca să conțină 3 bile albe în C_9^3 moduri; VII. 20. Numărul cazurilor posibile este $n = 6^{30}$; a) cei 30 de pasageri se pot urca cite 3 în C_{30}^3 moduri; dacă în ultimul vagon s-au urcat 3 pasageri, atunci cei 27 rămași se pot urca în celelalte 5 vagoane rămase în 5^{27} moduri: $P_a = \frac{C_{30}^3 \cdot 5^{27}}{6^{30}}$; b) în fiecare vagon se pot urca $\frac{30}{6} = 5$ persoane; cei 5 pasageri se pot urca în primul vagon în C_{30}^5 moduri; din cei 30 de pasageri rămîn $30 - 5 = 25$ din care 5 se pot urca în al doilea vagon în C_{25}^5 moduri etc. $P = \frac{C_{30}^5 \cdot C_{25}^5 \cdot C_{20}^5 \cdot C_{15}^5 \cdot C_{10}^5}{6^{30}}$; c) $P = \frac{C_{30}^5 \cdot C_{22}^5 \cdot C_{16}^5 \cdot C_9^4 \cdot C_5^3}{6^{30}}$.

CAPITOLUL VIII

VIII. 2. $n = 7, a_1 = 12, a_7 = 0$ sau $n = 6, a_1 = 12, a_6 = 2$; VIII. 3. $S_{p+q-n} = \frac{n(n-1)}{2}$ VIII. 4. 4; VIII. 5. $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \frac{9}{3}$ sau $\frac{9}{3}, \frac{8}{3}, \dots, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{2}{3} = \frac{6}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \frac{9}{9} = 1; \frac{8}{3} = \frac{24}{9}, \frac{23}{9}, \frac{22}{9}, \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$; VIII. 6. a) Adunând relațiile $a_1 - a = a_1 - a, a_2 - a_1 = a_1 - a + r, a_3 - a_2 = a_1 - a + 2r, \dots, a_k - a_{k-1} = a_1 - a + (k-1)r$ se obține $a_k - a = k(a_1 - a) + \frac{k(k-1)}{2}r$, și deoarece $a_{n+1} = b, b - a = (n+1)(a_1 - a) + \frac{(n+1)nr}{2} \Rightarrow a_1 - a = \frac{b-a}{n+1} - \frac{nr}{2}$ etc.; b) $a_1 = a + \frac{b-a}{n+1} - \frac{nr}{2}, a_n = b - \frac{b-a}{n+1} + \frac{nr}{2}$; presupunind $b > a \Rightarrow a_1 > a, a_n < b \Rightarrow \frac{b-a}{n+1} - \frac{nr}{2} > 0, \frac{b-a}{n+1} + \frac{nr}{2} > 0 \Rightarrow -\frac{2(b-a)}{n(n+1)} < r < \frac{2(b-a)}{n(n+1)}$; VIII. 7. 2, 5, 8; VIII. 8. 12, 16, 20, 25; $\frac{99}{4}, \frac{81}{4}, \frac{63}{4}, \frac{49}{4}$; VIII. 9. $\div 2, 4, 8, 16, 32, 64; \div 64, 32, 16, 8, 4, 2; \div 4, 4\sqrt[3]{2}, 4\sqrt[3]{2}, 4\sqrt[3]{2}, 4\sqrt[3]{32}, 8; \div 32, 16\sqrt[3]{32}, 16\sqrt[3]{4}, 16\sqrt[3]{2}, 16\sqrt[3]{2}, 16; \div 16, 8, 4, 2$; VIII. 10. 18, 6, 2; VIII. 11. a) $a_1 = \frac{5}{32}, q = 3; a_1 = \frac{10935}{32}, q = \frac{1}{3}; a_1 = \frac{-5(337 \pm 97\sqrt{13})}{16}, q = \frac{-7 \pm \sqrt{13}}{6}$; b) $n = 6$; VIII. 12. $a_1 = 10, q = \frac{1}{5}; a = 15, q = -\frac{1}{5}$; VIII. 14. $A = 2a^2$; VIII. 15. $c^2 = bd = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{2ce}{c+e} \Rightarrow c^2 = ae$; VIII. 16. $b - a = c - d = d - c$ (1); $\frac{e}{a} = \frac{f}{e} = \frac{d}{f}$ (2); $\frac{a}{h} = \frac{a-g}{g-h}, \frac{g}{h} = \frac{gh}{h-d}$ (3) $\Rightarrow ad = ef$, iar din (1) $b = \frac{2a+d}{3}, c = \frac{a+2d}{3}$ și din (3) $g = \frac{3ad}{a+2d}, h = \frac{3ad}{2a+d} \Rightarrow bh = ad, cg = ad$ VIII. 17. $\frac{1}{a^2 - b^2} = \frac{1}{a^2(1 - q^2)}$; $\frac{1}{b^2 - c^2} = \frac{1}{a^2(1 - q^2)} \cdot \frac{1}{q^2}, \dots, \frac{1}{m^2 - l^2} = \frac{1}{a^2(1 - q^2)}, \frac{1}{q^{2(n-1)}}$; $q = \frac{b}{a}, S = \frac{a^{2n} - b^{2n}}{b^{2(n-1)} \cdot (a^2 - b^2)^3}$; VIII. 18. $n + 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$; VIII. 19. Termenul de rang k al sumei este $u_k = a_k \frac{[2a_1 + (k-1)r] \cdot k}{2} = \frac{r^2 k^3 + r(3a_1 - 2r)k^2 + (2a_1 - r)(a_1 - r)k}{2}, S = \sum_{k=1}^n u_k = \frac{r^2}{2} \cdot S_3 + \frac{r(3a_1 - 2r)}{2} \cdot S_2 + \frac{(2a_1 - r)(a_1 - r)}{2} \cdot S_1$ cu $S_p = 1^p + 2^p + \dots + n^p$; VIII. 20. $\sum_{k=1}^n (3k-2)^3 = \sum_{k=1}^n (27k^3 - 54k^2 + 36k - 8) = \frac{n(27n^3 - 18n^2 - 9n + 4)}{4}; \dots + n^p$; VIII. 21. $1 - \frac{1}{n+1}$; VIII. 22. $\frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$; VIII. 23. $\frac{1}{18} - \frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$; VIII. 24. Să scrie: $\frac{3p^2 + 2p + 5}{p(p+1)(p+2)(p+3)} = \frac{3}{p(p+1)} - \frac{13}{p(p+1)(p+2)} + \frac{26}{p(p+1)(p+2)(p+3)}$ se obține $\frac{43}{36} - \frac{3}{n+1} - \frac{18n^2 + 51n + 43}{6(n+1)(n+2)(n+3)}$; VIII. 25. $a_k = \sqrt{k + \alpha} - \sqrt{k + \alpha - 1}, S_n = a_{n+1} - a_1$; VIII. 26. $\frac{1}{\alpha + 1} - \frac{1}{\alpha + n + 1}$; VIII. 27. $\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4n+1}\right)$; VIII. 28. $\frac{1}{n + \sqrt{2}} - \frac{1}{n + \sqrt{2} + 1}$; VIII. 29. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n = \frac{5}{6}$; VIII. 31. a) $u_n = \begin{cases} \alpha^{\frac{n}{2}} \beta^{\frac{n}{2}} & \text{dacă } n \text{ este par,} \\ \alpha^{\frac{n+1}{2}} \beta^{\frac{n+1}{2}} & \text{dacă } n \text{ este impar;} \end{cases}$ b) $S_{2p-1} = (1 + \alpha) \frac{1 - (\alpha\beta)^p}{1 - \alpha\beta}, S_{2p} = (1 + \alpha) \frac{1 - (\alpha\beta)^p}{1 - \alpha\beta} + (\alpha\beta)^p$; c) $S = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha\beta}$; VIII. 32. $u_n = \log_a \frac{n-1}{n} - \log_a \frac{n}{n+1}, S_n = \log_a \frac{1}{2} - \log_a \frac{n}{n+1}, S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \log_a \frac{1}{2}$.

CAPITOLUL IX

IX. 1. $XA = AX \Rightarrow X = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = \left(a - \frac{b}{2}\right) \cdot I + \frac{b}{2} \cdot A$; IX. 2. $X = \begin{bmatrix} a & b \\ -\frac{3}{2}a & -\frac{b}{4} \end{bmatrix}$; IX. 3. a) $F = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \\ 4 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$; b) $F = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \\ -\frac{3}{4} & -3 \end{bmatrix}$; IX. 5. $X^2 = \begin{bmatrix} \hat{x}^2 + \hat{y}^2 & \hat{x}\hat{y} + \hat{y}\hat{x} \\ \hat{x}\hat{z} + \hat{z}\hat{x} & \hat{y}\hat{z} + \hat{z}\hat{y} \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} \hat{6} & \hat{1} \\ \hat{4} & \hat{6} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \hat{x}^2 + \hat{y}\hat{z} = \hat{6} \\ \hat{y}(\hat{x} + \hat{t}) = \hat{1} \\ \hat{z}(\hat{x} + \hat{t}) = \hat{4} \\ \hat{y}\hat{z} + \hat{t}^2 = \hat{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{x}^2 - \hat{t}^2 = \hat{0} \\ \hat{y}(\hat{x} + \hat{t}) = \hat{1} \\ \hat{z}(\hat{x} + \hat{t}) = \hat{4} \\ \hat{y}\hat{z} + \hat{t}^2 = \hat{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\hat{x} - \hat{t})(\hat{x} + \hat{t}) = \hat{0} \\ \hat{y}(\hat{x} + \hat{t}) = \hat{1} \\ \hat{z}(\hat{x} + \hat{t}) = \hat{4} \\ \hat{y}\hat{z} + \hat{t}^2 = \hat{6} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{x} - \hat{t} = \hat{0} \\ \hat{y}(\hat{x} + \hat{t}) = \hat{1} \\ \hat{z}(\hat{x} + \hat{t}) = \hat{4} \\ \hat{y}\hat{z} + \hat{t}^2 = \hat{6} \end{cases} (1); \quad \begin{cases} \hat{x} + \hat{t} = \hat{0} \\ \hat{y}(\hat{x} + \hat{t}) = \hat{1} \\ \hat{z}(\hat{x} + \hat{t}) = \hat{4} \\ \hat{y}\hat{z} + \hat{t}^2 = \hat{6} \end{cases} (2). \quad \text{Din (1) se obține: } \hat{x}_1 = \hat{3}, \hat{y}_1 = \hat{6},$$

$$\hat{z}_1 = \hat{3}, \hat{t}_1 = \hat{3}; \hat{x}_2 = \hat{2}, \hat{y}_2 = \hat{2}, \hat{z}_2 = \hat{1}, \hat{t}_2 = \hat{2} \text{ și deci } X_1 = \begin{bmatrix} \hat{3} & \hat{6} \\ \hat{3} & \hat{3} \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} \hat{2} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{Sistemul (2) este imposibil; IX. 6. } X = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}; Y = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}; \text{IX. 7. } X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{IX. 8. a) } A + B = \begin{bmatrix} 1 + \cos x & 2 \\ 1 + \cos x & \sin x \end{bmatrix}; A \cdot B = \begin{bmatrix} \cos x + 1 & 1 \\ \cos x(\cos x + 1) & \sin x \end{bmatrix};$$

$$\text{b) } \det(A \cdot B) = (1 + \cos x) \cdot \det(A); \text{IX. 9. a) } A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}; \text{b) } B =$$

$$= \begin{bmatrix} 2(2^n - 1) & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}(3^n - 1) \end{bmatrix} \det(B) = 3(2^n - 1)(3^n - 1); \text{IX. 10. (1) Se împarte,}$$

în primul determinant, coloana I cu a , a II-a, cu b și a III-a cu c și se înmulțește determinantul cu abc ; (2) Se adună coloanele a II-a și a III-a la I și se dă factor 2; se scade coloana I din a II-a și respectiv din a III-a; se scade apoi din coloana I suma coloanelor II și III. IX. 11. 237; IX. 12. 240; IX. 13. 5; IX. 14. 9; IX. 15. Se adună coloana I înmulțită cu $-2, -3, -4$, respectiv la coloana II, III, IV și se dezvoltă după prima linie; se obține -126 ; IX. 16. Se înmulțește linia I cu bcd , linia a II-a cu acd , linia a III-a cu abd , linia a IV-a cu abc și se împarte determinantul cu $(abcd)^3$; se dă factor $abcd$ de pe prima coloană și se adună linia I la liniile a II-a, a III-a, a IV-a după care se dezvoltă după prima coloană; după ce se scot factorii comuni se calculează determinantul de ordinul 3 obținut; rezultă $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$; IX. 17. Se înmulțește coloana I cu a^2 , coloana a II-a cu b^2 , coloana a III-a cu c^2 , se împarte determinantul cu $(abc)^2$ și se dă factor de pe prima linie $(abc)^2$; se scade coloana a II-a din I, coloana a III-a din a II-a și se dezvoltă după linia I; se obține $D_3 = (a-b)(b-c)(c-a) \cdot (ab+bc+ac)^2$; IX. 18. Se adună coloana I înmulțită cu $-x$ la coloana a II-a, coloana a II-a înmulțită cu $-x$ la coloana a III-a și coloana a III-a înmulțită cu $-x$ la coloana a IV-a; se dezvoltă după prima linie și se scoate factor $(y-x)(z-x)$ etc. Se obține valoarea zero; IX. 19. Se adună liniile a II-a și a III-a la I; IX. 20. Se adună linia a II-a la I și se dă factor $a+b$; IX. 21. Se notează $\sin \alpha = a_1$, $\sin \beta = a_2$, $\sin \gamma = a_3$, $\cos \alpha = b_1$, $\cos \beta = b_2$, $\cos \gamma = b_3$ și se observă că determinantul se descompune într-o sumă de determinanți care au câte două coloane iden-

tice; IX. 23. $n^2 = (-n) \cdot (-n)$; se dă factor comun din linia I pe $-n$ și din coloana I pe $-n$, apoi se adună linia I la toate celelalte; $D_n = n^2$; IX. 24. 1. IX. 25. $(a+2)(a-1)^2$;

$$\text{IX. 26. } V_3^2 = V_3 \cdot V_3 = \begin{bmatrix} 3 & a_1 + a_2 + a_3 & a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \\ a_1 + a_2 + a_3 & a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 & a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 \end{bmatrix}; \text{IX. 27. Se fo-}$$

losește metoda inducției complete; IX. 28. $\det(M \cdot M^t) = 45$; IX. 29. 2; IX. 30. 2;

$$\text{IX. 31. 4; IX. 32. 2; IX. 33. 2; IX. 34. 4; IX. 35. } \begin{bmatrix} 1-a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{IX. 36. } \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}; \text{IX. 37. } \begin{bmatrix} -\frac{16}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{11}{5} & \frac{17}{10} \\ \frac{21}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{16}{5} & -\frac{11}{5} \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -\frac{7}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} & \frac{9}{10} \end{bmatrix} \text{IX. 38. } x = 1$$

$y = -1, z = 2$; IX. 39. Dacă $a-b+c=0$ sistemul este compatibil nedeterminat: $x = -\frac{7}{2}$.

$z = -\frac{3}{2}a + 2b, y = z + a - b, z = z \in R$; dacă $a-b+c \neq 0$ sistemul este imposibil; IX. 40.

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \text{IX. 41. } Y = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}; \text{IX. 42. } x = \frac{(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)}, y = \frac{(k-a)(k-c)}{(b-a)(b-c)}, z = \frac{(k-a)(k-b)}{(c-a)(c-b)}; \text{IX. 43. } x = 1, y = -1, z = \frac{1}{2}, t = \frac{1}{3};$$

$$\text{IX. 44. } x = 2, y = 4, z = 3, t = 1, u = -1; \text{IX. 45. } x = \frac{1}{m-1}, y = 1, z = \frac{2m-3}{m-1},$$

$$\forall m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}; \text{IX. 46. } m = 1, x = 2, y = -1; m = -1, x = -\frac{2}{5}, y = -\frac{13}{5};$$

$$\text{IX. 47. } x = -\frac{2z+3t+13}{4}, y = \frac{10z+t+19}{9}, z = z, t = t; \text{IX. 48. Sistemul admite}$$

$$\infty^2 \text{ soluții; IX. 49. } \Delta = -(m-1)(m-9); x = -\frac{15}{m-9}, y = \frac{3}{m-9}, z = \frac{m}{m-9},$$

$$\forall m \in \mathbb{R} \setminus \{1, 9\}; \text{pentru } m = 1, x = \frac{5}{3}(1-z), y = -\frac{1}{3}(1-z), z = z; \text{pentru } m = 9$$

sistemul este incompatibil; IX. 50. $m \neq 1, n = 0 \Rightarrow$ sistemul este incompatibil; $m = 1$

și $n = \frac{1}{2} \Rightarrow$ sistemul este compatibil nedeterminat; $m = 1$ și $n \neq \frac{1}{2} \Rightarrow$ sistemul este in-

compatibil; IX. 51. a) $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\} \Rightarrow$ sistemul este compatibil cu soluția $x =$

$$= \frac{8-m}{m+2}, y = \frac{10-m}{m+2}, z = \frac{12-m}{m+2}; \text{ b) Se rezolvă în } Z \text{ sistemul: } (m+2)(x+1) = 10, (m+2)(y+1) = 12, (m+2)(z+1) = 14 \Rightarrow m \in \{-4, -3, -1, 0\}; \text{ c) } m \in (-2, 6); \text{ IX. 52. } x = -4k, y = 3k, z = k, \forall k \in R; \text{ IX. 53. } m \neq -1 \Rightarrow x = y = z = 0; m = -1 \Rightarrow x = -y = -z; \text{ IX. 54. } m = 6 \Rightarrow x = y = z = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}; m = \pm \sqrt{3}; \text{ IX. 55. } x = \frac{7}{6}u - z, y = \frac{5}{6}u + z, t = \frac{u}{3}, z = z, u = u; \text{ IX. 56. } x = \frac{-4t + 7u}{8}, y = \frac{-4t + 5u}{8}, z = \frac{4t - 5u}{8}, t = t, u = u; \text{ IX. 58. } (0, 0, 0, 1, 1); (1, -2, 1, 0, 0).$$

CAPITOLUL X

$$\text{X. 1. } E = \begin{cases} \frac{2}{2x+3}, x \in [2, +\infty); \\ \frac{2}{3x+1}, x \in \left(-\frac{3}{2}, 2\right) \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}; \\ 0, x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \end{cases};$$

$$\text{X. 2. } E = \begin{cases} \frac{5x}{\sqrt{1-4x^3}}, x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \\ \frac{-5x}{\sqrt{1-4x^3}}, x \in \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \end{cases};$$

$$\text{X. 3. } E = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{7}}, x \in \left[\frac{5a}{2}, +\infty\right) \\ 2\sqrt{\frac{2x-4a}{7a}}, x \in \left[2a, \frac{5a}{2}\right] \end{cases}; \text{ X. 4. } x \in D = (-\infty, -3) \cup (-3, -2) \cup$$

$$\cup (-1, 1) \cup (1, 2) \cup (3, +\infty); \text{ X. 5. } x \in (2, 5] \text{ (vezi problema X. 3, rezolvată).}$$

$$\text{X. 6. a) } x \in R \setminus \{-2, 0\}; \text{ b) } E(x) = \begin{cases} 2x+3, x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty) \\ 1, x = -1 \\ 2x^2+2x+1, x \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \end{cases}$$

$$\text{X. 7. a) Expresia nu are sens pentru } \left\{-1, -\frac{1}{3}, 0\right\}; \text{ b) } E(x) = 6x^2 - 2x + 3, E(x) =$$

$$= 7 \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = 1; \text{ X. 8. a) } \sqrt{ab} \text{ b) } 1; \text{ X. 9. } (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \left|\frac{1+a}{1-a}\right|, E =$$

$$= \frac{a+1}{\sqrt{a}}; \text{ b) } a = 1, a = 7 \pm 4\sqrt{3}; \text{ X. 10. } \frac{8ab}{(a-b)^2}; \text{ b) } 4(1+\sqrt{2}); \text{ X. 11. } 2(2x-3) \cdot$$

$$(2x+1); \text{ X. 12. Se rezolvă ecuația de gradul al doilea în raport cu } x: (2x+y-1) \cdot (2x+y+2); \text{ X. 13. } x^4+2 = (x^2)^2+2x^2 \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 - 2x^2 \sqrt{2} = (x^2+\sqrt{2})^2 -$$

$$- (\sqrt{2}\sqrt{2}x)^2 = (x^2 - \sqrt{2}\sqrt{2}x + \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}\sqrt{2}x + \sqrt{2}); \text{ X. 14. } 4x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (2x^2)^2 + 2(\sqrt{2}xy)^2 + (y^2)^2 - (\sqrt{2}xy)^2 = (2x^2+y^2)^2 - (\sqrt{2}xy)^2 = (2x^2+y^2 - \sqrt{2}xy) \cdot$$

$$(2x^2+y^2 + \sqrt{2}xy); \text{ X. 15. } x^4+y^4+z^4-4xyz(x+y+z) = (x^2+y^2+z^2)^2 - 2(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2+2x^2yz+2xy^2z+2xyz^2) = (x^2+y^2+z^2)^2 - 2(xy+yz+xz)^2 = (x^2+y^2+z^2 - \sqrt{2}xy - \sqrt{2}xz - \sqrt{2}yz) \cdot$$

$$(x^2+y^2+z^2 + \sqrt{2}xy + \sqrt{2}xz + \sqrt{2}yz); \text{ X. 16. } m = -\frac{2}{3}, m = -2, p = -\frac{1}{3}; \text{ X. 17. } Q(x) = (x-3)(x-1)(x+2)(x+4); P(3) =$$

$$= P(1) = P(-2) = P(-4) = 0; \text{ X. 18. } Q(x, y, z) = 3(x+y)(y+z)(z+x); P(-y, y, z) = P(x, -z, z) = P(x, y, -y) = 0; \text{ X. 19. a) } b = 0, x^{n-1} + 2x^{n-2} + \dots + 2^{n-2}x + 2^{n-1}; \text{ b) } P(x) = C(x) \cdot (x-1)(x-2) + (2^n-1) \Rightarrow P(1) = 2^n-1, P(2) = 2(2^n-1) \Rightarrow a = 1, b = 2; \text{ X. 20. a) } m = -3, \text{ b) } P(x) = (x-1)^2(x-2); \text{ X. 21. } Q(x) =$$

$$= (x-1)(x-2), m = -6, n = 8; \text{ X. 22. Se împarte } P(x) \text{ la } x^2+2 \text{ și se pune condiția ca restul împărțirii să fie un polinom identic nul; } m = 31, n = 18; \text{ X. 23. } P(i) =$$

$$= P(-i) = 0; \text{ X. 24. Fie } \alpha \text{ și } \beta \text{ rădăcinile lui } Q(x); \alpha^2 + \alpha + 1 = \beta^2 + \beta + 1 = 0, \alpha^3 = \beta^3 = 1; P(\alpha) = \alpha^{3a} + \alpha^{3b+1} + \alpha^{3c+2} = 1 + \alpha + \alpha^2 = 0 \text{ și analog } P(\beta) = 0; \text{ X. 25. } m = 6n+2, m = 6n+4, n \in N \text{ (vezi problema X.11 rezolvată); X. 26. Fie } -1, \alpha, \beta \text{ rădăcinile de ordinul al treilea ale lui } -1; \alpha^2 - \alpha + 1 = \beta^2 - \beta + 1 = 0, \alpha^3 = \beta^3 =$$

$$= -1, \alpha - 1 = \alpha^2 \Rightarrow P(\alpha) = (\alpha^2)^{2n+1} + (-1)^{n+1} \cdot \alpha^{n+2} = \alpha^{3n} \cdot \alpha^{n+2} + (-1)^{n+1} \cdot \alpha^{n+2} =$$

$$= (-1)^n \alpha^{n+2} + (-1)^{n+1} \cdot \alpha^{n+2} = 0; \text{ analog } P(\beta) = 0; \text{ X. 27. a) } m_1 = 2, m_2 = 3;$$

$$\text{ b) } 2, -1 \pm i\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \frac{\sqrt[3]{4}}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}); \text{ c) } 0, 0, 1, 2, \frac{-3 \pm i\sqrt{15}}{2}; \text{ X. 28. } Q(x) =$$

$$= \frac{(x-1)x(x-1)(x-2)}{4}, S_n = Q(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \text{ (vezi pro-$$

$$\text{blema X.15 rezolvată); X. 29. a) } P(x) = 2x^2 - x + 3; \text{ b) } Q(x) = \frac{4x^3 - 9x^2 + 23x - 18}{6},$$

$$P(1) + P(2) + \dots + P(n) = Q(n+1) = \frac{4n^3 + 3n^2 + 17n}{6}; \text{ c) Se consideră } P^*(x) =$$

$$= (2x-1)^3; \text{ se obține } P^*(1) + P^*(2) + \dots + P^*(n) = 1^3 + 3^3 + \dots + (2n-1)^3 =$$

$$= Q^*(n+1) = n^2(2n^2-1), \text{ unde } Q^*(x) \text{ este definit prin } Q^*(x+1) - Q^*(x) = P^*(x),$$

$$Q^*(1) = 0, \text{ care dă } Q^*(x) = 2x^4 - 8x^3 + 11x^2 - 6x + 1; \text{ X. 30. } P(x) = -\frac{3}{8}x^4 +$$

$$+ \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{8} \text{ (vezi problema X. 14 rezolvată); X. 31. a) } a_3 = 6, a_2 =$$

$$= 15, a_1 = 18, a_0 = 8; \text{ b) } P(x) = (x+1)(x+2)(x^2+3x+4); \text{ X. 32. } P(x) =$$

$$= x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 2; \text{ X. 33. Vezi problema X.16 rezolvată; } P(x) = (x-2)^4 -$$

$$- 18(x+2) + 38; \text{ X. 34. } P(x) = (x+i)^4 - 2i(x+i)^3 - (1+i)(x+i)^2 - 5(x+i) +$$

$$+ 7 + 5i; \text{ X. 35. } (P, Q) = x^3 + 3x^2 + x - 1, [P, Q] = x^6 + 7x^5 + 14x^4 - 21x^3 - 26x^2 + 5x + 6; \text{ X. 36. a) } (P, Q) = x^2 + x - 6; [P, Q] = 4x^5 + 8x^4 - 21x^3 - 26x^2 + 5x + 6; (P, Q) = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 2; \text{ b) } \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{4x^2-1}{x+1} \ln D = R \setminus \{-3, 2\}; \frac{1}{P(x)} -$$

$$- \frac{1}{Q(x)} = -\frac{4x^2-x-2}{(x+1)(4x^2-1)(x^2+x-6)}; \text{ X. 37. } \frac{x^2-3}{x^2-8}; \text{ X. 38. } \frac{x^3-x+5}{3x^2-1}; \text{ X. 39. } x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2) = (x+1)^2\sqrt{(x-2)^2}, x^3 - 3x + 2 = (x -$$

$$-1)^2 \sqrt{(x+2)^2}, F(x) = \frac{(x+1)\sqrt{x-2}}{(x-1)\sqrt{x+2}}; \text{ X. 40. } y = z^2, F = \frac{x + \sqrt{x+2}}{x-1}; \text{ X. 41. } \\ y = z^2, F = \frac{x - \sqrt{y} + 1}{x + \sqrt{y} - 1}; \text{ X. 42. } \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - x - 11}; \text{ X. 43. } \frac{2x - y + 2}{2x + y}; \text{ X. 44. } \frac{2x + y - 1}{2x - y + 1}; \\ \text{ X. 45. } \frac{x(y-z)}{y}; \text{ X. 46. } x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1); a = 6, b = 4, c = -13, d = \\ = -10, F(x) = \frac{2(x^2 - x - 1)}{x^2 + 4x + 5}, x \in R \setminus \{-1, 2\}; \text{ X. 47. a) } \frac{x+2y}{x-1}; \text{ b) } 2; \text{ X. 48. } m = \\ = 0, F = 1; m = 4, F = 9; \text{ X. 49. a) } F(n) = 3n^2 - 3n + 1 + \frac{1}{(n+1)(n+2)}; \\ \text{ b) } \sum_{n=1}^k (3n^2 - 3n + 1) = k^3; \text{ X. 50. } \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+1)^2} + \frac{4}{(x+1)^3} + \frac{2}{(x+1)^5}; \text{ X. 51. } \\ \frac{x+1}{2} - \frac{10}{(x+1)^2} + \frac{15}{(x+1)^3} - \frac{5}{(x+1)^4} + \frac{3}{(x+1)^5} - \frac{5}{(x+1)^6}; \text{ X. 52. } \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \\ + \frac{1}{x^3} + \frac{4(1-x)}{x-1} - \frac{4(1+x)}{x+1} - \frac{2(1+x)^2}{x-1}; \text{ X. 53. } -\frac{x-2}{3} + \frac{4}{x-3}; \text{ X. 54. } \\ \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{4(x^2+1)} - \frac{x-1}{2(x^2+1)^2}; \text{ X. 55. } -\frac{2x-3}{5(x^2+4)} + \frac{5(2x+3)}{5(2x+3)} + \\ + \frac{3}{5(3x+2)}; \text{ X. 56. } 1 - \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 4x + 5}; \text{ X. 57. } \frac{x-2}{3(x^2+1)} - \frac{x^3 - 2x^2 - 2x + 4}{9}; \\ \text{ X. 58. } -\frac{x-2}{7(x^2+x+1)} + \frac{1}{7(x^3-x^2+1)}; \text{ X. 59. } 1 + \frac{1}{6x} - \frac{2(x-2)}{3(x-3)}; \\ \text{ X. 60. } -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}; \text{ X. 61. } \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2+1} + \frac{2x}{x^2+2x+2}; \text{ X. 62. } \\ -\frac{x-2}{x^2-2x+2}; \text{ X. 63. } x+6 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{41}{x-3}; \text{ X. 64. a) } x \in R \setminus \\ \setminus \{-4, -3, -2, -1\}; \text{ b) } F = \frac{x^2 + 3x + 4}{(x+3)(x+4)}; \text{ c) } F = 1 + \frac{4}{x+3} - \frac{8}{x+4}.$$

CAPITOLUL XI

XI. 1. $4, -2 \pm \sqrt{3}$; **XI. 2.** $-2, -1, 3$; **XI. 3.** $1, 7 \pm \sqrt{48}$; **XI. 4.** $1 - x^4 - |1 - x^2| = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1, x_{3,4} = 0$; **XI. 5.** $y^3 - 2(a_2^2 - 2a_1)y^2 + [(a_2^2 - 2a_1)^2 + a_1^2 - 2a_0a_2] \cdot y - [(a_2^2 - 2a_1)a_1^2 - 2a_0a_2] = 0$; **XI. 6.** $m = 6, x_1 = x_2 = 6, x_3 = -1$ sau $m = -\frac{200}{81}, x_1 = x_2 = \frac{4}{3}, x_3 = \frac{25}{3}$; **XI. 7.** Se folosesc formulele lui Viète și relația $x_1 + x_3 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 5, p = -6$; **XI. 8.** $13x^4 - 46x^3 + 13x^2 + 30x - 100 = 0$; **XI. 9.** $m = 12, x_1 = x_2 = 2, x_3 = -6$; **XI. 10.** $m = 3, x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 5$; **XI. 11.** $m = 31; x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{6}, x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$ sau $m = -25,$

$x_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{2}, x_{3,4} = \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}$; **XI. 12.** $m = -9, x_1 = 1, x_2 = 2, x_{3,4} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$ sau $m = 6, x_{1,2} = \pm i\sqrt{2}, x_{3,4} = -\frac{3 \pm \sqrt{21}}{3}$; **XI. 13.** $m = 3, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2, x_{3,4} = \pm i\sqrt{2}$; **XI. 14.** a) $\alpha = -5, \beta = 5, \gamma = -6$; b) $-1, 1, 2, 3$; **XI. 15.** Se folosesc formulele lui Viète împreună cu relațiile $x_1 + x_2 = x_3 + x_4, x_1^2 = x_3 \cdot x_5$; se obțin rădăcinile $1, 5, 2, 4, 8$; **XI. 16.** $m = 2, x_1 = x_2 = x_3 = 1, x_4 = -1$; **XI. 17.** $-2, -2, 2, -1, -1, 1; \alpha = 3, \beta = -3, \gamma = -15, \delta = -16$; **XI. 18.** $b^2 = ac$ și sistemul $b^3 = 512, \frac{2}{b^3} = \frac{q}{12b\sqrt{q}} + \frac{1}{3bq\sqrt{2}} \Rightarrow b = 8, q_1 = 2\sqrt{2}, q_2 = \sqrt{2}$. Pentru $q_1 = 2\sqrt{2}, x = 64$, iar pentru $q_2 = \sqrt{2}, x = 2^{107}$; **XI. 19.** $-1, -1, -1, 1$; **XI. 20.** $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$; **XI. 21.** $-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$; **XI. 22.** $x_1 \in (-\infty, 0), x_2 \in (0, \frac{10}{3}), x_3 \in (\frac{10}{3}, +\infty)$; **XI. 23.** $x_1 \in (-\infty, -\frac{7}{3}), x_2 \in (-\frac{7}{3}, 1), x_3 \in (1, +\infty)$; **XI. 24.** $x_1 \in (-\infty, -1), x_2 \in (-1, +\infty)$ și 2 rădăcini complexe; **XI. 25.** $x_1 \in (-\infty, -\frac{1}{2}), x_2 \in (-\frac{1}{2}, 2)$ $x_3 \in (2, +\infty)$ și 2 rădăcini complexe; **XI. 26.** $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow 2$ răd. reale negative, $x_1 \in (-\infty, -1), x_2 \in (-1, 0); x \in (0, +\infty) \Rightarrow$ ecuația nu admite rădăcini reale pozitive. **XI. 27.** $-2, 3, 3, 3$; **XI. 28.** $\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}, \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$; **XI. 29.** $-1, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$; **XI. 30.** $-1, -1, -1, 2, 2$; **XI. 31.** $m = 0$, toate rădăcinile comune: $x_1 = 0, x_{2,3} = \pm i; m = -2, x = 1; m = -10, x = 2$; **XI. 32.** C.m.m.d.c. este un polinom de gradul al doilea; se înmulțește prima ecuație cu x și se scade ecuația a doua $\Rightarrow$ c.m.m.d.c. $= mx^2 - (n+1)x - 2m = 0$; se împarte prima ecuație la c.m.m.d.c. și se pune condiția ca restul să fie identic nul $m = -3, n = 2$; **XI. 33.** $m \in (-\infty, -\frac{4}{27}) \Rightarrow 1$ răd. reală negativă, 2 răd. complexe, $m = -\frac{4}{27} \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{1}{3}, x_3 \in (-\infty, -1); m \in (-\frac{4}{27}, 0) \Rightarrow 3$ răd. reale diferite; $m = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -1, x_3 \in (-\frac{1}{3}, +\infty); m \in (0, +\infty) \Rightarrow 1$ răd. reală în $(-\frac{1}{3}, +\infty)$ și 2 răd. complexe. **XI. 34.** $m \in (-\infty, -3834) \Rightarrow 1$ răd. reală în $(4, +\infty)$ și 4 răd. complexe $m = -3834 \Rightarrow x_1 = x_2 = 3, x_3 \in (4, +\infty)$ și 2 răd. complexe; $m \in (-3834, -3712) \Rightarrow 3$ răd. reale, 2 răd. complexe; $m = -3712 \Rightarrow x_1 = x_2 = 4, x_3 \in (-3, 3)$ și 2 răd. complexe; $m \in (-3712, 3712) \Rightarrow 1$ răd. reală în $(-3, 3)$ și 4 răd. complexe; $m = 3712 \Rightarrow x_1 = x_2 = -4, x_3 \in (-3, 3)$ și 2 răd. complexe; $m \in (3712, 3834) \Rightarrow 3$ răd. reale, 2 răd. complexe $m = 3834 \Rightarrow x_1 = x_2 = -3, x_3 \in (-\infty, -4)$ și 2 răd. complexe; $m \in (3834, +\infty) \Rightarrow 1$ răd. reală și 4 răd. complexe; **XI. 35.** $m \in (-\infty, -1) \Rightarrow 1$ răd. reală și 4 răd. complexe; $m = -1 \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{\sqrt{5}-1}{4}, x_3 = x_4 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}, x_5 = -1; m \in (-1, 1) \Rightarrow 5$ răd. reale; $m = 1 \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}, x_3 = x_4 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, x_5 = 1;$

$m \in (1, +\infty) \Rightarrow 1$ răd. reală, 4 răd. complexe; **XI. 36.** $f(x) = x^3 - 6x + \frac{24}{x} + m$, $f'(x) = \frac{3(x+2)(x-2)(x^2+2)}{x^2}$, $m \in (-\infty, -8) \Rightarrow 2$ răd. reale pozitive și 2 răd. complexe; $m = -8 \Rightarrow x_1 = x_2 = 2$ și 2 răd. complexe; $m \in (-8, 8) \Rightarrow 4$ răd. complexe; $m = 8 \Rightarrow x_1 = x_2 = -2$ și 2 răd. complexe $m \in (8, +\infty) \Rightarrow 2$ răd. reale negative și 2 răd. complexe; **XI. 37.** $m \in (-\infty, \sqrt{\frac{17}{8}}) \Rightarrow 2$ răd. reale, 2 răd. complexe; $m = -\sqrt{\frac{17}{8}} \Rightarrow 4$ răd. reale ($x_1 = x_2 = -\sqrt{\frac{17}{2}}$); $m \in (-\sqrt{\frac{17}{8}}, -\sqrt{\frac{17}{13}}) \Rightarrow 4$ răd. reale; $m = -\sqrt{\frac{17}{13}} \Rightarrow 4$ răd. reale ($x_1 = x_2 = -\sqrt{\frac{17}{13}}$); $m \in (-\sqrt{\frac{17}{13}}, 0) \Rightarrow 2$ răd. reale și 2 răd. complexe. $m = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$; $m \in (0, \sqrt{\frac{17}{13}}) \Rightarrow 2$ răd. reale și 2 răd. complexe $m = \sqrt{\frac{17}{13}} \Rightarrow 4$ răd. reale ($x_1 = x_2 = \sqrt{\frac{17}{13}}$); $m \in (\sqrt{\frac{17}{13}}, \sqrt{\frac{17}{8}}) \Rightarrow 4$ răd. reale $m = \sqrt{\frac{17}{8}} \Rightarrow 4$ răd. reale ($x_1 = x_2 = \sqrt{\frac{17}{2}}$); $m \in (\sqrt{\frac{17}{8}}, +\infty) \Rightarrow 2$ răd. reale și 2 răd. complexe; **XI. 38.** $m \in (-\infty, -4 \ln 2) \Rightarrow 2$ răd. reale; $m = -4 \ln 2 \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$; $m \in (-4 \ln 2, +\infty) \Rightarrow$ ecuația nu admite rădăcini; **XI. 39.** $f'(x) = 3(x^2 - a^2) = 0 \Rightarrow x = \pm a$, $f(-a) = 2(a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b) \cdot E_1$, $f(a) = 2(b-a)(a^2 + ab + b^2) = (b-a) \cdot E_2$, $E_i = 2(a^2 \mp ab + b^2) \geq 0$, ($i = 1, 2$), $\forall a, b \in R$.

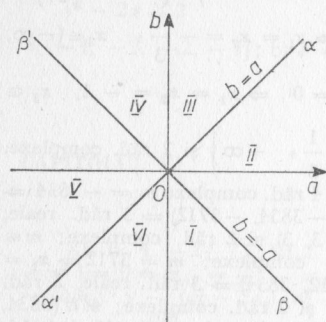


Fig. XI.39

$M(a,b)$ $a > 0$	$f(-\infty)$ $-\infty$	$f(-a)$ $(a+b) \cdot E_1$	$f(a)$ $(b-a) \cdot E_2$	$f(+\infty)$ $+\infty$
I	-	-	-	+
II	-	+	-	+
III	-	+	+	+
(O α)	-	+	0	+
(O β)	-	0	-	+
$M(a,b)$ $a < 0$	$f(-\infty)$ $-\infty$	$f(a)$ $(b-a) \cdot E_2$	$f(-a)$ $(a+b) \cdot E_1$	$f(+\infty)$ $+\infty$
IV	-	+	+	+
V	-	+	-	+
VI	-	-	-	+
(O α')	-	0	-	+
($\beta'O$)	-	+	0	+

Pentru $a = 0$, ecuația $x^3 + 2b^3 = 0$ cu $x_i = b\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{-1}$ ($i = 1, 2, 3$), **XI. 40.** $f'(x) = 3(x^2 - a^2) = 0 \Rightarrow x = \pm a$, $f(-a) = a(2a^2 + b)$, $f(a) = a(-2a^2 + b)$:

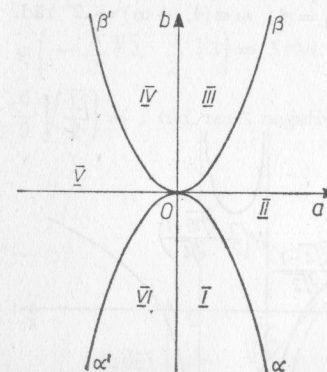


Fig. XI.40

$M(a,b)$ $a > 0$	$f(-\infty)$ $-\infty$	$f(a)$ $a(2a^2 + b)$	$f(-a)$ $a(-2a^2 + b)$	$f(+\infty)$ $+\infty$
I	-	-	-	+
II	-	+	-	+
III	-	+	+	+
(O α)	-	0	-	+
(O β)	-	+	0	+
$M(a,b)$ $a < 0$	$f(-\infty)$ $-\infty$	$f(-a)$ $a(-2a^2 + b)$	$f(a)$ $a(2a^2 + b)$	$f(+\infty)$ $+\infty$
IV	-	-	-	+
V	-	+	-	+
VI	-	+	+	+
($\beta'O$)	-	0	-	+
($\alpha'O$)	-	+	0	+

Pentru $a = 0$, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; **XI. 41.** $f'(x) = 4(x - 2a - b)^3 = 0 \Rightarrow x = 2a + b$, $f(2a + b) = -16(a^2 + b^2 - 4)(a^2 + \frac{b^2}{16} - 1)$:

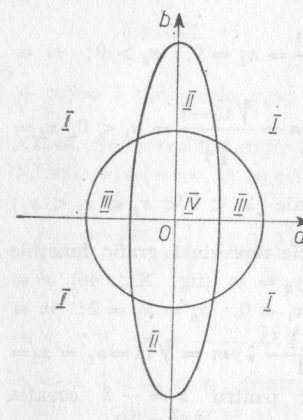


Fig. XI.41

$M(a,b)$	$f(-\infty)$ $+\infty$	$f(2a+b)$ $-(a^2 + b^2 - 4)(16a^2 + b^2 - 16)$	$f(+\infty)$ $+\infty$
I	+	-	+
II	+	+	+
III	+	+	+
IV	+	-	+
$a^2 + b^2 - 4 = 0$	+	0	+
$16a^2 + b^2 = 16$	+	0	+

XI. 42. a) $x \approx 0,337$; b) $x_1 \approx 0,537$; $x_2 \approx -1,508$; XI. 43. a) $1, 1, 1 \pm i, 1 \pm i$; b) afixele numerelor $1 + i$ și $1 - i$ sînt simetrice în raport cu afixul numărului 1; XI. 44.

Se reprezintă grafic funcțiile $y = \frac{x^2}{2x-4}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ și $y = m \in \mathbb{R}$ (fig. XI. 44);

$m \in (-\infty, 0) \Rightarrow 2$ răd. reale de semne contrare; $m = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$; $m \in (0, 4) \Rightarrow$ ecuația nu admite rădăcini reale; $m = 4 \Rightarrow x_1 = x_2 = 4$; $m \in (4, +\infty) \Rightarrow 2$ răd.

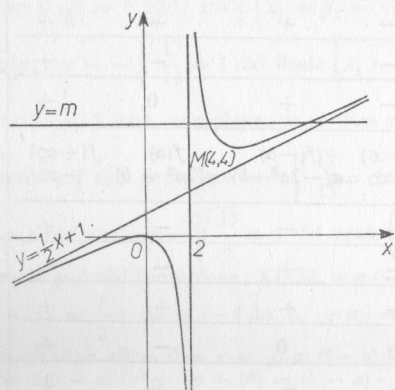


Fig. XI.44.

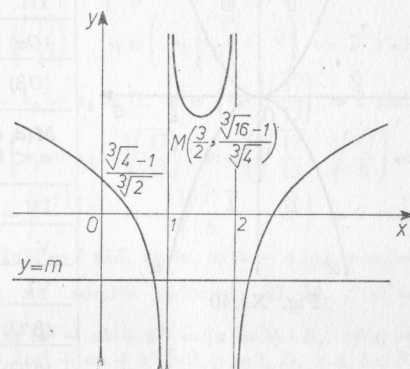


Fig. XI.45.

reale pozitive, pentru $x = 2$ ecuația este imposibilă; XI. 45. Se reprezintă grafic funcțiile $y_1 = \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 3x + 2}$ și $y_2 = m$ pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ (fig. XI. 45);

$m \in \left(-\infty, \frac{\sqrt[3]{4}-1}{\sqrt[3]{2}}\right) \Rightarrow 2$ răd. reale pozitive; $m = \frac{\sqrt[3]{4}-1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow x_1 = 0, x_2 > 0$; $m \in$

$\left(\frac{\sqrt[3]{4}-1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{\sqrt[3]{16}-1}{\sqrt[3]{4}}\right) \Rightarrow 2$ răd. reale $x_1 < 0, x_2 > 0$; $m = \frac{\sqrt[3]{16}-1}{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow x_1 < 0, x_2 =$

$x_3 = \frac{3}{2} x_4 > 0$; $m \in \left(\frac{\sqrt[3]{16}-1}{\sqrt[3]{4}}, +\infty\right) \Rightarrow 4$ răd. reale $x_1 < 0 < x_2 < x_3 < x_4$;

pentru $x = 1$ sau $x = 2$ ecuația este imposibilă; XI. 46 Se reprezintă grafic funcțiile $y_1 = \frac{x(x+2)(2x^2-7x+2)}{x^2-3x+2}$ pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ și $y_2 = m$ (fig. XI. 46) $m \in$

$\left(-\infty, -\sqrt[3]{28}\right) \Rightarrow 1$ răd. reală negativă; $m = -\sqrt[3]{28} \Rightarrow x_1 < 0, x_2 = x_3 = 2$; $m \in$

$\left(-\sqrt[3]{28}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt[3]{11}\right) \Rightarrow 3$ răd. reale; $m = 0, x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{33}}{4}$; $m = \sqrt[3]{11} \Rightarrow x_1 = x_2 =$

$-1, x_3 > 0$; $m \in \left(\sqrt[3]{11}, +\infty\right) \Rightarrow 1$ răd. reală pozitivă; pentru $x = -2$ ecuația este imposibilă; XI. 47. Se reprezintă grafic funcțiile $y_1 = \frac{2x^3 - 9x}{x^2 - 5}$ pentru

$x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$ și $y_2 = m$ (fig. XI. 47); $m \in \left(-\infty, -\frac{6}{5} \sqrt{\frac{15}{2}}\right) \Rightarrow 3$ răd. reale

$x_1 < x_2 < 0, x_3 > 0$; $m = -\frac{6}{5} \sqrt{\frac{15}{2}} \Rightarrow x_1 = x_2 = -\sqrt{\frac{15}{2}}, x_3 > 0$; $m \in \left(-\frac{6}{5} \sqrt{\frac{15}{2}},$

$-\frac{3}{2} \sqrt{3}\right) \Rightarrow 1$ răd. reală pozitivă; $m = -\frac{3}{2} \sqrt{3} \Rightarrow x_1 = x_2 = -\sqrt{3}, x_3 > 0$; $m \in$

$\left(-\frac{3}{2} \sqrt{3}, \frac{3}{2} \sqrt{3}\right) \Rightarrow 3$ răd. reale; $m = \frac{3}{2} \sqrt{3} \Rightarrow x_1 < 0, x_2 = x_3 = \sqrt{3}$; $m \in \left(\frac{3}{2} \sqrt{3},$

$\frac{6}{5} \sqrt{\frac{15}{2}}\right) \Rightarrow 1$ răd. reală negativă; $m = \frac{6}{5} \sqrt{\frac{15}{2}} \Rightarrow x_1 < 0, x_2 = x_3 = \sqrt{\frac{15}{2}}$; $m \in \left(\frac{6}{5} \sqrt{\frac{15}{2}},$

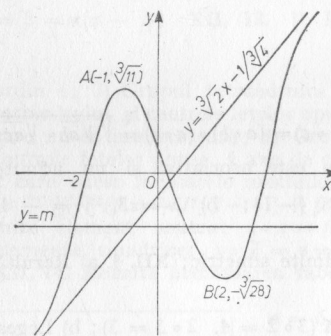


Fig. XI. 46

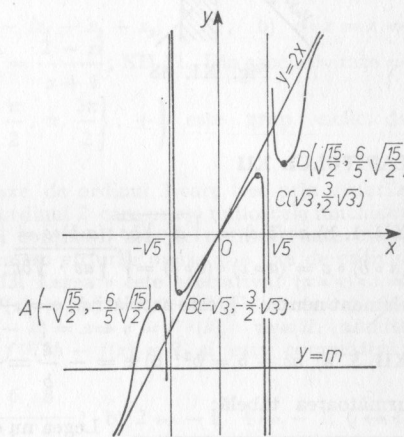


Fig. XI. 47.

$+\infty) \Rightarrow 3$ răd. reale $x_1 < 0, 0 < x_2 < x_3$; pentru $x = \pm \sqrt{5}$ ecuația este imposibilă;

XI. 48. Se reprezintă grafic funcțiile $y_1 = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x^2 + x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 0)$ și $y_2 = m$ (fig. XI.48); $m \in (-\infty, 0) \Rightarrow$ ecuația nu admite rădăcini reale; $m = 0 \Rightarrow x = -1$; $m \in$

$\left(0, e^{\frac{4}{1+\sqrt{17}}}, \sqrt{\frac{11+3\sqrt{17}}{8}}\right) \Rightarrow 1$ răd. reală negativă; $m = e^{\frac{4}{1+\sqrt{17}}} \cdot \sqrt{\frac{11+3\sqrt{17}}{8}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 < 0, x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$; $m \in \left(e^{\frac{4}{1+\sqrt{17}}} \cdot \sqrt{\frac{11+3\sqrt{17}}{8}}, +\infty\right) \Rightarrow 3$ răd. reale,

$x_1 < 0, 0 < x_2 < x_3$; pentru $x \in (-1, 0)$ ecuația este imposibilă; XI. 49. Se reprezintă grafic funcțiile $y_1 = |x+1| e^{-|x-1|}$, $x \in \mathbb{R}$ și $y_2 = m$ (fig. XI.49); $m \in (-\infty, 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ecuația nu admite rădăcini reale; $m = 0 \Rightarrow x = -1$; $m \in (0, e^{-3}) \Rightarrow 4$ răd. reale;

$m = e^{-3} \Rightarrow x_1 = -2, x_2 < 0, x_3 > 0$; $m \in (e^{-3}, 2) \Rightarrow 2$ răd. reale; $m = 2 \Rightarrow x = 1$; $m \in (2, +\infty) \Rightarrow$ ecuația nu admite rădăcini reale;

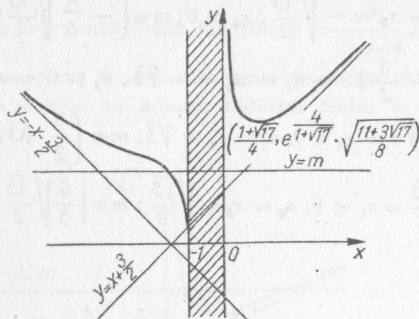


Fig. XI. 48

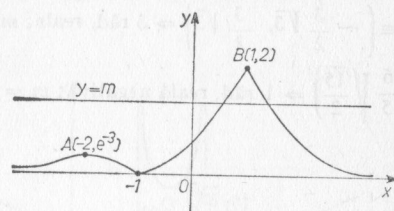


Fig. XI. 49

CAPITOLUL XII

XII. 1. b) $a \circ (b \circ c) = \sqrt{a \cdot \sqrt{bc}}$; $(a \circ b) \circ c = \sqrt{\sqrt{ab} \cdot c}$; $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ (a \circ c) = \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{ac}}$; $(a \circ b) \circ c = (a \circ c) \circ (b \circ c) = \sqrt{\sqrt{ac} \cdot \sqrt{bc}}$; **XII. 2.** a) $\perp$ nu este asociativă și nu admite element neutru; $\top$ este asociativă, $e = -\frac{1}{2}, \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; b) $x = 3, y = -1$,

XII. 3. a) $ac + b = b^2$; b) $e = -\frac{c}{b} = \frac{1-b}{a}$; nu admite simetric; **XII. 4.** a) Rezultă următoarea tabelă:

$\circ$	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	2	4	3	1
3	3	4	2	1
4	4	1	4	1

Legea nu este comutativă ($3 \circ 2 = 4, 2 \circ 3 = 3$); b) Legea nu este asociativă ($3 \circ 3) \circ 3 = 3, 3 \circ (3 \circ 3) = 4$; **XII. 5.** a)

$(x \perp y) \perp z = \frac{1}{16}xyz - \frac{1}{2}(xy + yx + zx) + 4(x + y + z) - 24 = x \perp (y \perp z)$; b) $e = 12, \forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{8\}, \tilde{x} = \frac{8(x-6)}{x-8}$; c) $x \top (y \perp z) = \frac{1}{4}(xy + xz) - \frac{3}{2}z - 2y - 2z + 20$; $(x \perp y) \top (x \perp z) = \frac{1}{4}(xy + xz) - 4x - 2y - 2z + 50$ d) $e' = -2, x_1 = \frac{3}{2}, y_1 = -$

$-\frac{7}{6}; x_2 = \frac{5}{6}, y_2 = -\frac{1}{2}$; **XII. 6.** a) Se obține: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1 \Rightarrow \cos 2\alpha +$

$+\cos 2\beta = 0 \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(|\alpha - \beta|) = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ sau $|\alpha - \beta| = \frac{\pi}{2}$; b) $(R, \circ)$

este un grupoid; **XIII. 7.** a) $\log_a |x + a| \circ \log_a |x + 2a| = \log_a (|x + a| + |x + 2a|)$ și ecuația se scrie $|x + a| + |x + 2a| = |x - 3a| \Rightarrow x_1 = -6a, x_2 = 0$;

b) $(x \circ y) \circ z = \log_a (a^x + a^y + a^z) = x \circ (y \circ z)$ și $(R, \circ)$ este semigrup; **XII. 8.** a) Funcțiile $\sin x$ și $\cos x$ definite respectiv pe $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ și $[0, \pi]$ admit inverse; b) asociativitatea: $x \top (y \top z) = \arcsin \{\sin x \cdot \sin [\arcsin (\sin y \cdot \sin z)]\} = \arcsin (\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z) =$

$= (x \top y) \top z$; elementul neutru pentru $\top$ este $\theta = \frac{\pi}{2}, \forall x \neq 0$, iar pentru $\perp$ este $\theta' =$

$= 0, \forall x \neq \frac{\pi}{2}$; $A = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ $B = [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$; **XII. 9.** $(R, \circ)$ semigrup;

$M = R \setminus \left\{-\frac{b}{a}\right\}$, elementul neutru $e = -\sqrt[2n+1]{\frac{b-1}{a}}$, elemente simetrice $\tilde{x} =$

$= \sqrt[2n+1]{\frac{1}{ax^{2n+1} + b}} - b$, **XII. 10.** a) $\forall z_1, z_2 \in C, z_1 \circ z_2 \in C; z_1 \circ z_2 = z_2 \circ z_1; z_1 \circ (z_2 \circ z_3) =$

$= (z_1 \circ z_2) \circ z_3 = z_1 z_2 z_3 + i(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1) - (z_1 + z_2 + z_3) - 2i$; b) $e \circ z = z \Rightarrow$

$\Rightarrow e = 1 - i; z \circ \tilde{z} = 1 - i \Rightarrow \forall z \in C \setminus \{-i\}, \tilde{z} = \frac{2-z}{z+i}$; **XII. 11.** Din asociativitate $\Rightarrow$

$\Rightarrow \beta = \alpha(\alpha - 1)$; **XII. 12.** 1) Dubletul $\left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}, +$ este grup ciclic de

ordin 4; 3) Grupul tetraedrului T conține 4 axe de ordinul 3 care trec prin vîrfurile tetraedrului, și centrele fețelor opuse și 3 axe de ordinul 2 care unesc mijloacele muchiilor care nu se intersectează; 4) Grupul octaedrelui conține 3 axe de ordinul 4 care unesc centrele fețelor opuse, 4 axe de ordinul 3 care unesc vîrfurile opuse și 6 axe de ordinul 2 care unesc mijloacele muchiilor opuse; **XII. 13.** Legea $\circ$ este asociativă: $(x \circ y) \circ z =$

$= f^{-1}\{f[f^{-1}(f(x) + f(y) - k)] + f(z) - k\} = f^{-1}\{f(x) + f(y) + f(z) - 2k\} = x \circ (y \circ z)$, admite element neutru: $e \circ x = f^{-1}\{f(x) + f(e) - k\} = x \circ e = f^{-1}(k), \forall x \in R$, admite elemente simetrice: $x \circ \tilde{x} = e \Rightarrow \forall x \in R, \tilde{x} = f^{-1}\{2k - f(x)\} \in R$ și este comutativă; **XII. 14.** Rezultă următoarea tabela:

$\odot$	2	4	6	8
2	4	8	2	6
4	8	6	4	2
6	2	4	6	8
8	6	2	8	4

$e = 6, \tilde{x} = \frac{x}{8}$; b) $2 \leftrightarrow -i, 4 \leftrightarrow -1, 6 \leftrightarrow 1,$

$8 \leftrightarrow i$; **XII. 15.** $A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$, diferență simetrică; legea de compoziție este asociativă, admite ca element neutru mulțimea vidă, fiecare element este simetricul său și este comutativă; izomorfismul este $f: P(E) \rightarrow P(E), f(A) = A, \forall A \in P(E)$; **XII. 16.** a) $U(t)$ este bijectivă și $U(t_1 + t_2) = U(t_1) \cdot U(t_2)$ aplicația U este izomorfism al lui $(R, +)$ în $(M_3, \cdot)$; b) $x = 1, y = 2, z = 4$; **XII. 17.** a) Din condiția de asociativitate a legii de compoziție rezultă $\varphi(a) = 1$ sau $\varphi(a) = a$; pentru $\varphi(a) = 1$, grupul $(K, \odot)$ este necomutativ, iar pentru $\varphi(a) = a$, grupul $(K, \odot)$ este comutativ; b) Deoarece $(M_2, \cdot)$ este grup necomutativ rezultă că numai pentru $\varphi(a) = 1$

cele două grupuri sînt izomorfe, izomorfismul fiind $f(a, b) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$; **XII. 18.**

c) 1) Din $f: G \rightarrow M$ omomorfism de grupuri rezultă $f(x \circ y) = f(x) * f(y)$ și $f(e) = e'$. Dacă $x, y \in \ker f$, atunci $f(x \circ y) = f(x) * f(y) = e' * e' = e'$, adică $x \circ y \in \ker f$, $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in \ker f, e \in \ker f, f(x \circ \tilde{x}) = f(x) * \tilde{f}(x) = e' \Rightarrow \tilde{x} \in \ker f \Rightarrow$

$\Rightarrow (\ker f, \circ)$ este grup, subgrup al lui $(G, \circ)$. Fie $x \in \ker f$ și $y \in G$; rezultă $f(y \circ x \circ \tilde{y}) =$

rezulă $f(x) * f(y) = f(x \circ y) \in \text{Im } f$ și axioamele grupului sînt verificate; **XII. 19.** a) Elemente neutre: $(0, 0)$ față de legea $\oplus$ și $(1, 0)$ față de legea $\odot$; b) Elemente simetrice

$\left(-\frac{a}{a^2 - b^2}, -\frac{b}{a^2 - b^2} \right)$. Dacă $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in G$ atunci $(a_1, b_1) \odot (a_2, b_2) \in G$ deoarece $(a_1 a_2 + b_1 b_2)^2 - (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 = (a_1^2 - b_1^2)(a_2^2 - b_2^2) \neq 0 \Rightarrow (G, \odot)$ este grup; c) Pentru $(a, b) \in M$ și $a^2 - b^2 = 0$, din $(a, b) \odot (x, y) = (0, 0)$ rezultă sistemul omogen $\begin{cases} ax + by = 0 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$ care admite soluții diferite de soluția zero și deci afirmația este

justificată; **XII. 20.** a) $(R^2, \oplus)$ este grup comutativ cu $e = (0, 0)$ și $(x, y) = (-x, -y)$; $(R^2 \setminus \{(0, 0)\}, \odot)$ este semigrup comutativ cu $e' = (1, 0)$; $(x_1, y_1) \odot [(x_2, y_2) \oplus (x_3, y_3)] = [(x_1, y_1) \odot (x_2, y_2)] \oplus [(x_1, y_1) \odot (x_3, y_3)] = (x_1 x_2 + x_1 x_3, y_1 y_2 + y_1 y_3 + x_1 y_2 + x_1 y_3 + x_2 y_1 + x_3 y_1)$ și $[(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2)] \odot (x_3, y_3) = [(x_1, y_1) \odot (x_3, y_3)] \oplus [(x_2, y_2) \odot (x_3, y_3)] = (x_1 x_3 + x_2 x_3, y_1 y_3 + y_2 y_3 + x_1 y_3 + x_2 y_3 + x_3 y_1 + x_3 y_2)$; b) Divizorii lui zero sînt perechi de forma $(0, b)$ cu $b \neq 0$ și perechi de forma $(a, -a)$ cu $a \neq 0$;

c) $(M, \odot)$ este grup cu elementele simetrice $\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a(a+b)} \right)$ d) $f[(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2)] = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) = x_1 + x_2$ și $f[(x_1, y_1) \odot (x_2, y_2)] = f(x_1, y_1) \cdot f(x_2, y_2) = x_1 x_2$ și f nu este injectivă: pentru $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \Rightarrow f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = x_1$;

XII. 21 a) $e_{\oplus} = f_{\Phi} \equiv 0, \tilde{f}_A = \frac{f_A}{2f_A - 1}, e_{\odot} = f_T \equiv 1, f_A \odot (f_B \oplus f_C) = (f_A \odot f_B) \oplus$

$\oplus (f_A \odot f_C), (f_A \oplus f_B) \odot f_C = (f_A \odot f_C) \oplus (f_B \odot f_C)$; pentru $A, B \in P(T)$ mulțimi disjuncte, $f_A \odot f_B = f_{\Phi}, f_A \neq f_{\Phi}, f_B \neq f_{\Phi} \Rightarrow$ există divizorii ai lui zero; b) $\psi: P(T) \rightarrow F_T, \psi(A) = f_A, \forall A \in P(T); \psi(A \Delta B) = f_{A \Delta B} = f_A + f_B - 2f_A \cdot f_B = f_A \oplus f_B = \psi(A) \oplus \psi(B), \psi(A \cap B) = f_{A \cap B} = f_A \cdot f_B = f_A \odot f_B = \psi(A) \odot \psi(B)$ și ψ bijectivă $[\psi(A) = \psi(B) \Rightarrow f_A = f_B \Leftrightarrow A = B \text{ și } \exists A \in P(T), \forall f_A \in F_T \Rightarrow \psi(A) = f_A]$; c) $e_{\odot} = \varphi(e)$ cu e elementul neutru față de legea $\circ, \tilde{\varphi} = \varphi\{[\varphi^{-1}(\beta)]^2\}$ cu $\beta \in B$ și $[\varphi^{-1}(\beta)]^2 \in A$ elementul simetric al lui $\varphi^{-1}(\beta) \in A$; pentru izomorfism se folosește $\alpha \ominus \beta = \varphi[\varphi^{-1}(\alpha) \circ \varphi^{-1}(\beta)], \alpha \otimes \beta = \varphi[\varphi^{-1}(\alpha) * \varphi^{-1}(\beta)]$ cu $\alpha, \beta \in B$ și $\forall x, y \in A, \exists \alpha, \beta \in B \Rightarrow \alpha = \varphi(x), \beta = \varphi(y)$; **XII. 22.** (b) $(F, \oplus)$ este grup comutativ $[(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2)] \oplus (x_3, y_3) = (x_1, y_1) \oplus [(x_2, y_2) \oplus (x_3, y_3)] = (x_1 y_2 y_3 + x_2 y_1 y_3 + x_3 y_1 y_2,$

$y_1 y_2 y_3), e = (0, 1), (x, y) = \left(-\frac{x}{y^2}, \frac{1}{y} \right); (F, \odot)$ este semigrup comutativ; $[(x_1, y_1) \odot (x_2, y_2)] \odot (x_3, y_3) = (x_1, y_1) \odot [(x_2, y_2) \odot (x_3, y_3)] = (x_1 x_2 x_3, y_1 y_2 y_3)$; distributivitatea nu are loc: $(x_1, y_1) \odot [(x_2, y_2) \oplus (x_3, y_3)] = (x_1 x_2 y_3 + x_1 x_3 y_2, y_1 y_2 y_3)$ și $[(x_1, y_1) \odot (x_2, y_2)] \oplus [(x_1, y_1) \odot (x_3, y_3)] = (x_1 x_2 y_1 y_3 + x_1 x_3 y_1 y_2, y_1^2 y_2 y_3)$ și deci $(F, \oplus, \odot)$ nu formează un inel; c) Se verifică că pentru $(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2), (x_3, y_3) \mathcal{R} (x_4, y_4)$ avem $[(x_1 y_1) \oplus (x_3, y_3)] \mathcal{R} [(x_2, y_2) \oplus (x_4, y_4)]$ și $[(x_1, y_1) \odot (x_3, y_3)] \mathcal{R} [(x_2, y_2) \odot (x_4, y_4)]$; d) Fie $C_{(x, y)}$ clasa de echivalență a cuplului (x, y) . În mulțimea $F/\mathcal{R}$ se definesc legile de compoziție internă $\circ$ și $*$ astfel:

$$\forall C_{(x_1, y_1)}, C_{(x_2, y_2)} \in F/\mathcal{R}; \quad C_{(x_1, y_1)} \circ C_{(x_2, y_2)} = C_{(x_1 y_2 + x_2 y_1, y_1 y_2)}$$

$$C_{(x_1, y_1)} * C_{(x_2, y_2)} = C_{(x_1 x_2, y_1 y_2)},$$

Se verifică ușor că legile de compoziție astfel definite sînt compatibile cu relația de echivalență $\mathcal{R}$, adică compunerea a două clase nu depinde de reprezentanții (x, y) și (x', y') aleși, ceea ce s-a arătat la punctul c); d) Tripletul $(F/\mathcal{R}, \circ, *)$ nu formează inel deoarece nu are loc distributivitatea, vezi punctul b); **XII. 23.** Din comutativitatea legii de compoziție $\oplus \Rightarrow a = b$, iar din asociativitate $\Rightarrow a = b = 1$; elementul neutru este 1 și elementul simetric lui x este $\tilde{x} = 2 - x$; din asociativitatea legii de compoziție $\odot \Rightarrow c = 3$ și se

verifică celelalte axiome ale corpului; **XII. 24.** $e_{\oplus} = \sqrt[2n+1]{3}, \tilde{x}_{\oplus} = \sqrt[2n+1]{6 - x^3}; e_{\odot} = \sqrt[2n+1]{\frac{7}{2}}, \tilde{x}_{\odot} = \sqrt[2n+1]{\frac{12x^3 - 35}{4(x^3 - 3)}}$ **XII. 25.** a) $e_{\oplus} = -\arctg 5, \tilde{x}_{\oplus} = -\arctg(\tg x +$

$+ 10); e_{\odot} = -\arctg 4; \tilde{x}_{\odot} = -\arctg \frac{5 \tg x + 24}{\tg x + 5}$; b) $f(x + y) = f(x) \oplus f(y) = \arctg$

$(x + y - 5), f(x \cdot y) = f(x) \odot f(y) = \arctg(x y - 5)$ aplicația f este surjectivă dar nu este injectivă $[x_1 \neq x_2 + k\pi \Rightarrow f(x_1) = f(x_2 + k\pi)]$; **XII. 26.** a) $\mathcal{R}$ este simetrică, reflexivă și tranzitivă; $K^2/\mathcal{R} = \{ \{C(x, y)\} | x, y \in K^1 \}$ cu $C(x, y) = \{(x_1, y_1) | x_1 - y_1 = x + y, (x_1, y_1) \in K^2\}$; b) $e_{\oplus} = C(0_K, 0_K), \tilde{C}(x, y) \oplus = C(-x, -y); e_{\odot} = C(0_K, e_K), \tilde{C}(x, y) \odot = C\left(0_K, \frac{e_K}{y-x}\right)$ unde $0_K \in K$ (și respectiv $e_K \in K$) reprezintă elementul neutru din K față

de legea de compoziție $\oplus$ (respectiv $\odot$); **XII. 27.** a) $e_+ = 0, \tilde{a}_+ = -a, e_- = 1, \tilde{a}_- = \frac{a}{N(a)}$ unde $N(a) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$ și $\tilde{a} = \alpha - \beta i - \gamma j - \delta k$ b) $e_+ = O_2, \tilde{M}_+ = -M,$

$e_- = I, M^{-1} = \frac{M^*}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2},$ unde $M^* = \begin{bmatrix} a - ib & -c - id \\ c - id & a + ib \end{bmatrix}$; c) aplicația

$f: A \rightarrow M_2, f(a) = M$ este bijectivă și $f(a_1 + a_2) = M_1 + M_2, f(a_1 \cdot a_2) = M_1 \cdot M_2.$

CAPITOLUL XIII

XIII. 1. $\sqrt{x + 2(1 - \sqrt{x + 1})} = |\sqrt{x + 1} - 1|$; a) $M' = \{-1\}$; b) $M \setminus M' = \{\alpha \in \mathbb{R} | \alpha = 1 - 2\sqrt{x + 1}; x \in [-1, 0)\}$; **XIII. 2.** a) $x = t, y = 4 - t^2 \Rightarrow A = \{(x, y) | y = -x^2 + 4, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ (parabolă); $B = \{(x, y) | y = -x^2 + 2mx - m^2 + m + 4, x, y \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{R}\}$ (familie de parabole); b) $A = B \Rightarrow -x^2 + 4 = -x^2 + 2mx - m^2 + m + 4 \Rightarrow m = 0; A \cap B = \{(x, y) | y = -x^2 + 4 \text{ și } y = -x^2 + 2mx - m^2 +$

$+ m + 4, x, y, m \in \mathbb{R}\} = \{(1, 3)\} \Rightarrow m = 3$; **XIII. 3.** a) $A = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = \right.$

$= 0, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \}$, $B = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{d^2} - 1 = 0, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}$ (elipse); b) $A =$

$= B \Rightarrow |a| = |c|$ și $|b| = |d|$; $A \cap B = \Phi \Rightarrow$ elipsele nu au nici un punct comun $\Rightarrow |a| \neq |c|, |b| \neq |d|$ și $a > b, c > d$ (sau $a < b, c < d$); $A \cap B = \{(1, 1), (-1, 1),$

$(-1, -1), (1, -1)\} \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}$; c) M este mulțimea punctelor (x, y)

din interiorul elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, iar M_2 este mulțimea punctelor (x, y) din

interiorul cercului $x^2 + y^2 - a^2 = 0$; în funcție de valorile lui b există cazurile din fig. XIII. 3. $M = M_1 \cap M_2$ este regiunea hașurată; fără conturul respectiv; **XIII. 4.**

a) $x \in (-\infty, -1] \Rightarrow y = (1 - 2a)x - 2a, x \in [-1, 1] \Rightarrow y = x, x \in [1, +\infty) \Rightarrow y = 3x - 2$; reprezentînd graficele respective considerînd $1 - 2a \geq 0$ se deduce că f este

bijectivă dacă și numai dacă $1 - 2a > 0 \Rightarrow a < \frac{1}{2}$; b) pentru $a < \frac{1}{2}, x \in (-\infty, -1) \Rightarrow$

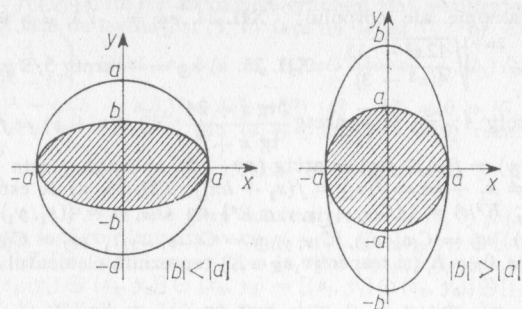


Fig. XIII. 3

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+2a}{1-2a} = (-\alpha - \beta + \gamma)x - \alpha + \beta + \delta; x \in [-1, 1] \Rightarrow f^{-1}(x) = x = (\alpha - \beta + \gamma)x + \alpha + \beta + \delta; x \in (1, +\infty) \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3} = (\alpha + \beta + \gamma)x + \alpha - \beta + \delta$$

de unde se obține sistemul: $-\alpha - \beta + \gamma = \frac{1}{1-2a}, -\alpha + \beta + \delta = \frac{2a}{1-2a}, \alpha - \beta + \gamma = 1, \alpha + \beta + \delta = 0, \alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{3}, \alpha - \beta + \delta = \frac{2}{3}$, cu soluția $\alpha = \frac{a}{2a-1}, \beta = -\frac{1}{3}, \gamma = \frac{a-2}{3(2a-1)}, \delta = \frac{-(a+1)}{3(2a-1)}$ și deci $f^{-1}(x) = \frac{1}{3(2a-1)} \cdot \left(3a|x+1| - (2a-1)|x-1| + (a-2)x - (a+1) \right)$; XIII. 5. a) $f(x) = \frac{3\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1}{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$;

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{x_1}{2} - \operatorname{tg} \frac{x_2}{2} \right) \left(3\operatorname{tg} \frac{x_1}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{x_2}{2} - 1 \right)}{2\operatorname{tg} \frac{x_1}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{x_2}{2}} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{x_1}{2} - \operatorname{tg} \frac{x_2}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

sau $3\operatorname{tg} \frac{x_1}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{x_2}{2} - 1 = 0$ pentru $x_1 = x_2 = \frac{\pi}{3}$, deci $f(x)$ este injectivă; f este surjectivă dacă $\forall y \in [\sqrt{3}, 2], \exists x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right]$ astfel încât $y = f(x)$; rezultă $x = 2 \operatorname{arctg} \frac{y + \sqrt{y^2 - 3}}{3}$

definită pentru $y \in [\sqrt{3}, 2]$ și $\frac{\pi}{3} \leq 2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{y + \sqrt{y^2 - 3}}{3} \leq \frac{\pi}{2}$, adică $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \frac{y + \sqrt{y^2 - 3}}{3} \leq 1 \Rightarrow y \in [\sqrt{3}, 2]$; se verifică ușor că $f(x) = y$ adică $f\left(\operatorname{arctg} \frac{y + \sqrt{y^2 - 3}}{3}\right) = y$; deci f este o bijecție; b) $f^{-1}: [\sqrt{3}, 2] \rightarrow \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right], f^{-1}(x) = 2 \operatorname{arctg} \frac{x + \sqrt{x^2 - 3}}{3}$.

XIII. 6. a) $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, -1], \\ 2x+1, & x \in (-1, 0), \\ 1, & x = 0, \\ -2x+1, & x \in (0, 1), \\ -1, & x \in [1, +\infty). \end{cases}$

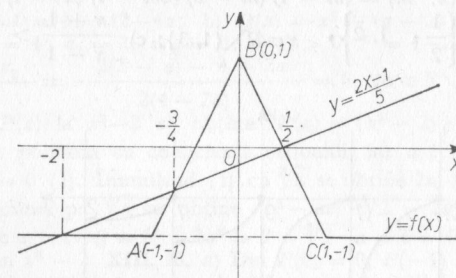


Fig. XIII. 6.

c) Inecuația este echivalentă cu $f(x) > \frac{2x+4}{5} - 1$ și are loc pentru $x \in (-\infty, -2) \cup \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right)$. Metoda grafică: Se intersectează $y = f(x)$ cu dreapta $y = \frac{2x-1}{5}$ și se obține $f(x) > \frac{2x-1}{5}$ pentru $x \in (-\infty, -2) \cup \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right)$ XIII. 7. Fie $[x] = t \in \mathbb{Z}, \forall x \in [t, t+1)$. Rezultă

$$(x) = \begin{cases} \frac{t-x}{t-x+1} & \text{pentru } x \in [t, t+1), \forall t \in \mathbb{Z}_- \\ \frac{t-x}{t+x+1} & \text{pentru } x \in [t, t+1), \forall t \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

cu $\mathbb{Z}_- = \mathbb{Z} \cap (-\infty, 0]$ și

$$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z} \cap [0, +\infty) \cdot f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{Z}, \lim_{\substack{x \nearrow t+1 \\ t \in \mathbb{Z}_-}} f(x) = -\infty, \lim_{\substack{x \nearrow t+1 \\ t \in \mathbb{Z}_+}} f(x) = -\frac{1}{2(t+1)}$$

Tabelul de valori este următorul:

x	$\dots -3$	-2	-1	0	1	2	$3 \dots$
$f(x)$	$0 \quad \frac{x+3}{x+2}$	$0 \quad \frac{x+2}{x+1}$	$0 \quad \frac{x+1}{x}$	$0 \quad \frac{-x}{x+1}$	$0 \quad \frac{1-x}{x+2}$	$0 \quad \frac{2-x}{x+3}$	0

Graficul este reprezentată în fig. XIII. 7.

XIII. 8. a) $(x+y-1)(x-y+1) = 9 \Rightarrow A = \{(-5, -3), (-5, 5), (-3, 1), (3, 1), (5, -3), (5, 5)\}$; b) $x = \frac{m^2+m+2}{(m-1)(m+2)}, y = \frac{2}{(m-1)(m+1)}$ cu $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$;

pentru $m = -2$, $m = 1 \Rightarrow$ sistemul este imposibil; c) $A \cap B$ se obține determinând valorile lui m astfel ca sistemul format din cele 3 ecuații să fie compatibil; din $x^2 - y^2 + 2y - 10 = 0$, $x - 2y = 1$ se obține $x_1 = 3$, $y_1 = 1 \Rightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$; $x_2 = -5$, $y_2 = -3 \Rightarrow m = \frac{-3 \pm \sqrt{57}}{6}$; XIII. 9. a) $A(x, m) = (m-1)(2m-1)(m-2)(x+1)(x-3)$; $B(x, m) = (m-1)(m-2)(2m-1)(x-1)(x-3)$; b) $F = \frac{x+1}{x-1}$, $m \in R \setminus \left\{ \frac{1}{2}, 1, 2 \right\}$, $x \in R \setminus \{1, 3\}$; c) $\frac{x+1}{x-1} > 1 \Rightarrow \frac{2}{x-1} > 0 \Rightarrow$

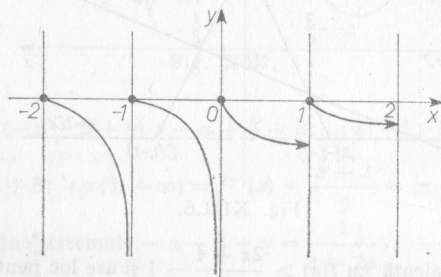


Fig. XIII.7.

$\Rightarrow x \in (1, +\infty)$; d) $F = 1 + \frac{2}{x-1} \Rightarrow x-1 = \pm 1$, $\pm 2 \Rightarrow x = -1, 0, 2, 3 \Rightarrow$

$F = 0, -1, 3, 2$; XIII. 10. Trebuie ca gradul lui $P = \sum_{i=1}^n [\text{gradul lui } P^{(i)}]$, adică $n = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow n = 3$ și deci $P(x) = a_3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, $P'(x) = 3a_3(x-x_1')(x-x_2')$, $P''(x) = 6a_3(x-x_1)$, $P'''(x) = 6a_3$. Din identitatea $P(x) \equiv P'(x) \cdot P''(x) \cdot P'''(x)$ rezultă $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$, $x_3 = x_3'' \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = a$ (arbitrar), $a_0 = \frac{\pm 1}{6\sqrt{3}}$ și $P(x) =$

$= \frac{\pm 1}{6\sqrt{3}}(x-a)^3$; XIII. 11. 1) Dacă $P(x) = k$ (const.) $\forall x \in R$, atunci $P'(0) = 0$, $P''(0) = 0$ și prin urmare m, n, p satisfac sistemul omogen (care se poate obține și din $P(x) \equiv k$ prin identificare):

$$\begin{cases} ma^2 + nb^2 + pc^2 = 0 \\ m + n + p = 0; \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(b-c) \neq 0 \text{ pt. } a \neq b \neq c, \\ ma + nb + pc = 0 \end{cases}$$

astfel că sistemul admite numai soluția $m = n = p = 0$ și deci $P(x) \equiv 0$; 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$, $P'(x) > 0, \forall x \in R$, adică funcția continuă $y = P(x)$ este strict crescătoare și graficul ei taie o singură dată axa Ox . Deci pentru $m, n, p > 0$, $P(x)$ are o singură rădăcină reală; 3) $m \cdot P(a) + n \cdot P(b) + p \cdot P(c) = 0$. Dacă $P(a) =$

$= P(b) = 0$ atunci și $P(c) = 0, \forall m \neq 0, n \neq 0, p \neq 0$. XIII. 12. Din $P_1(1) = 0$ și $P_2(-1) = 0$, rezultă sistemul

$$\begin{cases} P(2) + P'(-1) = 0 \\ P(-2) - P'(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 3b = -5 \\ 6a - 3b = 17 \Rightarrow a = 1, b = \frac{11}{3} \end{cases}$$

XIII. 13. a) $P(-2) = 0 \Rightarrow b = 12 - 4a$; b) $Q(x) = x^2 + (a-2)x + 4 - 2a = 0$; $\Delta = 0 \Rightarrow a_1 = -6, x_{1,2} = 4$; $a_2 = 2, x_{1,2} = 0$; c) $\Delta > 0, P = 4 - 2a < 0 \Rightarrow a \in (2, +\infty)$; d) $\frac{2(x_1+x_2)-x_1x_2}{2(2-a)-4+2a} = 0, \forall a \in R \setminus \{2\} \Rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}$.

XIII. 14. Împărțind $P(x)$ la $x^3 - 2$ se obține $P(x) = (x^3 - 2) \cdot C(x) + ax^2 + bx + c$, în care $C(x)$ este un polinom cu coeficienți raționali, iar $a, b, c \in Q$ și deci $P(\sqrt[3]{2}) = a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c = 0$ (1). Înmulțind (1) cu $\sqrt[3]{2}$ se obține $2a + b\sqrt[3]{4} + c\sqrt[3]{2} = 0$ (2); Din (1) și (2), eliminând pe $\sqrt[3]{4}$ se obține $(b^2 - ac) \cdot \sqrt[3]{2} = 2a^2 - bc \Rightarrow b^2 - ac = 0$, $2a^2 - bc = 0$, deoarece $a, b, c \in Q \Rightarrow b^3 = 2a^3 \Rightarrow b = \sqrt[3]{2} \cdot a \Rightarrow b = 0, a = 0, c = 0$ și deci $P(x)$ este divizibil prin $x^3 - 2$. XIII. 15. a) Din $P(0) = 0, P(-1) = 0, P'(1) = 0$ rezultă $c = 0, a + b - c = 1, a + b + c = -1$ sistem incompatibil $\Rightarrow$ nu există valori reale ale coeficienților a, b, c astfel ca $P(x)$ să se dividă cu $Q(x)$; b) $P(1) =$

$= P(0) \Leftrightarrow a + b + 1 = 0$. Din $P(x)$ divizibil cu $x^2 - x + 1$ se obține $b = 1, a = c = -2$; $x_1 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), x_2 = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}), x_3 = -1, x_4 = 2$; c) $P'(x) =$

$= 4x^3 - 6x^2 + b, P''(x) = 12x(x-1)$ au rădăcina comună $x = 1 \Rightarrow b = 2, c = -1$; d) $P(x) = (x-1)^3(x+1) \leq 0 \Rightarrow x \in [-1, 1]$. XIII. 16. a) $P(x): Q(x) = x+1$; b) $P(m) = 0 \Rightarrow 2m(m+1) \cdot (2m^2+1) = 0 \Rightarrow m_1 = 0, m_2 = -1$; c) $y_1 + y_2 =$

$$= \frac{(x_1+x_2)(1-mx_1x_2)}{2m} = \frac{(m-2)(2m^2+1)}{2m}, y_1y_2 = \frac{1}{x_1x_2} - m^2x_1x_2 - 2m = \frac{4-4m-m^2}{2}; 2my^2 - (m-2)(2m^2+1)y + m(4-4m-m^2) = 0; \text{XIII. 17. a) } \Delta =$$

$= 9m^2, P = \frac{m^2-4}{m^2-1}, S = \frac{2(m^2+2)}{m^2-1}; m \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \Rightarrow$ rădăcini reale pozitive, $m = \pm 2 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 > 0; m \in (-2, -1) \cup (1, 2) \Rightarrow$ răd. reale $x_1 > 0, x_2 < 0,$

$x_1 > |x_2|; m = \pm 1 \Rightarrow$ ecuație de gradul 1, $x = -\frac{1}{2}; m \in (-1, 0) \cup (0, 1) \Rightarrow$ răd.

reale negative; $m = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 < 0$; b) $\Delta > 0$ și $f(-1) \cdot f(1) \leq 0 \Rightarrow m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$

$\cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$; c) $m^2 - 1 < 0$ și $\Delta = 3(4m^2 - 1) < 0 \Rightarrow m \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; XIII. 18.

a) $P(x, m) = (x-2)(x-1)(x-2m+1) = 0$; $Q(x, m) = (x-2)(x-m-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ rădăcină comună (se poate folosi și algoritmul lui Euclid); b) $x_2 = m+1$ a doua rădăcină comună $\Rightarrow P(m+1) = -m(m-1)(m-2) = 0 \Rightarrow m_1 = 0, m_2 = 1, m_3 = 2$; $m_1 = 0 \Rightarrow P(x, 0) = (x-2)(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -1$; $Q(x, 0) = (x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 1$; $m_2 = 1 \Rightarrow P(x, 1) = (x-2)(x-1)(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_{2,3} = 1$; $Q(x, 1) = (x-2)(x-2) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 2 \Rightarrow$ ecuațiile nu au două rădăcini comune; $m_3 = 2 \Rightarrow P(x, 2) = (x-2)(x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 3$; $Q(x, 2) = (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 3$; c) $m_0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{(x-2)(x^2-1)} - \frac{1}{(x-2)(x-1)} > 0 \Rightarrow \frac{-x}{(x-2)(x^2-1)} > 0 \Rightarrow x \in (-1, 0) \cup (1, 2)$; d) parabola $Q(x, m) = x^2 - (m+3)x + 2(m+1)$ are ca axă de simetrie dreapta $x = \frac{m+3}{2} \Rightarrow \frac{m+3}{2} = 3 \Rightarrow m = 3$; XIII. 19. a) $f(-1) = 0 \Rightarrow y = -2x$ (dreaptă); b) $|t_1 + t_2| = 2t_1 t_2 \Rightarrow |x-2| = y+3 \Rightarrow y = x-5$ cu $x \in [2, +\infty)$; $y = -x-1$ cu $x \in (-\infty, 2]$ (semidrepte); c) $\Delta = x^2 - 4x + 1 - y = 0 \Rightarrow y = x^2 - 4x + 1$ (parabolă); d) Avem sistemele: $2 - x = y + 3$, $(2-x)^2 = x + 3$, $x < 2$ (1) și $x - 2 = y + 3$, $(2-x)^2 = x + 3$, $x > 2$ (2) $\Rightarrow x = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$, $y = -\frac{7-\sqrt{21}}{2}$ (1'); $x = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$, $y = -\frac{5+\sqrt{21}}{2}$ (2'); grafic se reprezintă dreptele $y = -x-1$, $x = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$ (1) și $y = x-5$, $x = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$ (2); e) $f(3t) = 9f(t-1) \Rightarrow 6t(1-2x) + 18x + 8y - 3 \equiv 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow 1-2x = 0$ și $18x + 8y - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{4} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$; f) $\Delta = x^2 - 4x + 1 - y$, $P = y + 3$, $S = -2(2-x)$; reprezentăm în planul xOy funcțiile: $\Delta = 0$, $P = 0$, $S = 0$ (fig. XIII. 19).

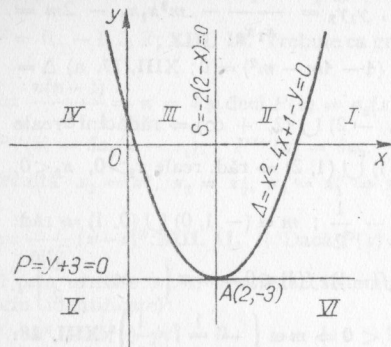


Fig. XIII.19.

Regiunea	Δ	P	S	Concluzii
I	+	+	+	2 răd. reale pozitive
II	-	+	+	2 răd. complexe
III	-	+	-	2 răd. complexe
IV	+	+	-	2 răd. reale negative
V	+	-	-	2 răd. reale $t_1 > 0, t_2 < 0$
VI	+	-	+	2 răd. reale $t_1 > 0, t_2 < 0$
$y = x^2 - 4x + 1, x > 2$	0	+	+	$t_1 = t_2 > 0$
$y = x^2 - 4x + 1, x < 2$	0	+	-	$t_1 = t_2 < 0$
$x = 2, y > -3$	-	+	0	$t_1 = -t_2$ complexe
$x = 2, y < -3$	+	-	0	$t_1 = -t_2$ reale
$y = -3, x > 2$	+	0	+	$t_1 = 0, t_2 > 0$
$y = -3, x < 2$	+	0	-	$t_1 = 0, t_2 < 0$
$x = 2, y = -3$	0	0	0	$t_1 = t_2 = 0$

XIII. 20. a) $\Delta = 2(m^2 + n^2 + m + n) = 0$ (cerc), $P = -\frac{m+n+2}{m+n}$, $S = \frac{2(m-n)}{m+n}$ (fig. XIII. 20 a)

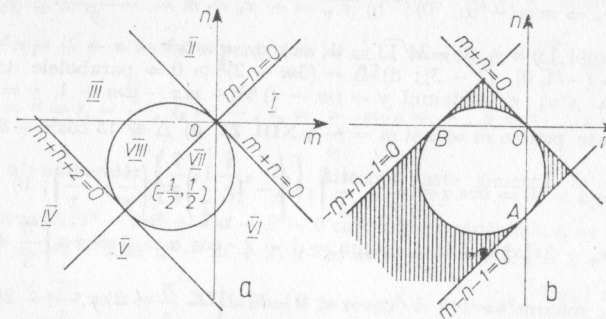


Fig. XIII.20.

Regiunea	Δ	P	S	Concluzii
I	+	-	+	răd. reale $x_1 > 0, x_2 < 0, x_1 > x_2 $
II	+	-	-	răd. reale $x_1 > 0, x_2 < 0, x_1 < x_2 $
III	+	+	+	răd. reale pozitive
IV	+	-	+	răd. reale $x_1 > 0, x_2 < 0, x_1 > x_2 $
V	+	-	-	răd. reale $x_1 > 0, x_2 < 0, x_1 < x_2 $
VI	+	+	-	răd. reale negative
VII	-	+	-	răd. complexe
VIII	-	+	+	răd. complexe
$m^2 + n^2 + m + n = 0$ $m < n$	0	+	-	$x_1 = x_2 > 0$
$m^2 + n^2 + m + n = 0$ $m > n$	0	+	+	$x_1 = x_2 < 0$
$m + n + 2 = 0$, $m > n$	+	0	-	$x_1 = 0, x_2 < 0$
$m + n + 2 = 0$, $m < n$	+	0	+	$x_1 = 0, x_2 > 0$
$m = n = 0$				ec. imposibilă
$m = n = -1$				$x_1 = x_2 = 0$

b) Exist condițiile: $m+n > 0, \Delta \geq 0, f(-1) = 2(m-n-1) > 0, f(1) = 2(-m+n-1) > 0$ (1) și $m+n < 0, \Delta \geq 0, f(-1) < 0, f(1) < 0$; $x_{1,2} \in (-1, 1)$ (2) pentru punctele $M(m, n)$ din regiunile hașurate inclusiv conturul cercului fără punctele O, A, B (fig. XIII. 20, b) [condițiile (1) nu au loc pentru nici un punct din planul mOn]; XIII. 21. a)

$x_v > 0, x_v < y_v \Rightarrow m \in (-\infty, 0)$; b) $y_v = -x_v \Rightarrow m = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{9}$; $y_{1,2} = (-2 \pm \sqrt{13})x^2 - (7 \pm \sqrt{13})x - 5 \mp 2\sqrt{13} = 0$; c) $y = m(x^2 - x - 2) - x^2 + 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (-1, 0), (2, 3)$; d) $\Delta = (3m-2)^2 \geq 0 \Rightarrow$ parabolele taie sau sînt tangente la axa x' ; e) sistemul $y = (m-1)x^2 - mx - 2m + 1, y = -x$ admite soluții confundate pentru $m = 1$ și $m = \frac{5}{9}$; XIII. 22. a) $\Delta = 15 \cos^2 \alpha - 8 \cos \alpha + 1 <$

$< 0; 1 - 2 \cdot \cos \alpha > 0 \Rightarrow \cos \alpha \in \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right) \cap \left[-1, \frac{1}{2}\right] = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right)$; b) $E = 16(x_1 + x_2)^2 - 32x_1x_2 - 3x_1^2x_2^2 = 64$; c) minim $\Rightarrow 1 - 2 \cdot \cos \alpha > 0 \Rightarrow \alpha \in \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$; maxim $\Rightarrow 1 - 2 \cdot \cos \alpha < 0 \Rightarrow \alpha \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$;

d) $1 - 2 \cdot \cos \alpha = 0$ [$f(x)$ este o funcție de gradul întâi] $\Rightarrow \alpha = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

XIII. 23. a) $y^2 - (2x+1)^2 = 0, y = mx - 3 \Rightarrow [(m+2)x - 2] \cdot [(m-2)x - 4] = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{m+2}, x_2 = \frac{4}{m-2}, m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \Rightarrow y_1 = -\frac{m+6}{m+2}, y_2 = \frac{m+6}{m-2}$;

pentru $m = 2, x = \frac{1}{2}, y = -2$; pentru $m = -2, x = -1, y = -1$; b) $\frac{2}{m+2} =$

$= \frac{4}{m-2}$ și $-\frac{m+6}{m+2} = \frac{m+6}{m-2} \Rightarrow m = -6, x = -\frac{1}{2}, y = 0$ sau altfel, ecuația în

x^2 obținută prin eliminarea lui $y: (m^2 - 4) \cdot x^2 - 2(3m+2)x + 8 = 0$ admite rădăcinile $x_1 = x_2 \Rightarrow \Delta = (m+6)^2 = 0 \Rightarrow m = -6$; c) $x_1 = \frac{2}{m+2} = k \in \mathbb{Z}, y_1 = -1 - 2 \cdot$

$\cdot \frac{2}{m+2} = -1 - 2k \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \frac{2(1-k)}{-k}, k \in \mathbb{Z}; x_2 = \frac{4}{m-2} = \frac{2k}{1-2k} = -1 +$

$+\frac{1}{1-2k} \in \mathbb{Z}$ dacă $1 - 2k = \pm 1 \Rightarrow k = 0, 1$; pentru $k = 0, m$ nu este definit, iar

pentru $k = 1, m = 0$ și $x_1 = 1, y_1 = -3, x_2 = -2, y_2 = -3$; d) $\frac{2}{m+2} \geq 0, -$

$-\frac{m+6}{m+2} \geq 0 \Rightarrow m \in (-2, +\infty) \cap [-6, -2) = \emptyset; \frac{4}{m+2} \geq 0, \frac{m+6}{m-2} \geq 0 \Rightarrow m \in (2, +$

$+\infty) \cap \{(-\infty, -6] \cup (2, +\infty)\} = (2, +\infty)$. XIII. 24. 1^o) Din primele două ecuații se obține: $\frac{a-b}{y} + \frac{a-c}{z} = 0, \frac{a-b}{x} + \frac{c-b}{z} = 0 \Rightarrow (b-c)x = (c-a)y =$

$= (a-b)z$ astfel că ecuația a treia a sistemului dă $x = \frac{1}{b-c}, y = \frac{1}{c-a}, z =$

$= \frac{1}{a-b}$; 2^o) $a < b < c \Rightarrow c-a > c-b > 0, c-a > b-a > 0 \Rightarrow (c-a)^2 > (c-b)$

$$(b-a) > 0 \Rightarrow \frac{1}{(c-a)^2} < \frac{1}{(c-b)(b-a)} \Leftrightarrow \frac{1}{c-a} < \frac{c-a}{(c-b)(b-a)} \Leftrightarrow \frac{1}{c-a} < \frac{1}{c-b} + \frac{1}{b-a} \Leftrightarrow x+y+z < 0. \text{ XIII. 25. a) } x, y, z \text{ sînt soluțiile ecuației:}$$

$$t^3 - mt^2 + npt - p = 0 \text{ care pentru } m = \frac{13}{12}, n = 9, p = \frac{1}{24} \text{ devine } 24t^3 - 26t^2 + 9t - 1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = \frac{1}{3}, t_3 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}, z = \frac{1}{4}, \text{ sau permută-}$$

rile ciclice ale numerelor $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$ (sistemul este simetric în x, y, z); b) pentru

$p = 2 \Rightarrow$ ecuația: $t^3 - mt^2 + 2nt - 2 = 0$ care admite rădăcinile $t_1 = 1 + i, t_2 = 1 - i \Rightarrow t^3 - mt^2 + 2nt - 2 \equiv (t^2 - 2t + 2)(t - \alpha) \Rightarrow m = 2 + \alpha, 2n = 2 + 2\alpha, 2 = 2\alpha \Rightarrow \alpha = 1,$

$m = 3, n = 2$ și $z = \alpha = 1$; XIII. 26. (1) $(x+y)^2 - xy = a^2, \frac{\log_a \sqrt{a}}{\log_a \sqrt[3]{a}} + \frac{\log_b \sqrt{b}}{\log_b \sqrt[3]{b}} =$

$$= \frac{a}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow (x+y)^2 - xy = a^2, x+y = \frac{2a}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x+y = \frac{2a}{\sqrt{3}}, xy = \frac{a^2}{3} \Rightarrow x = y = \frac{a}{\sqrt{3}};$$

$$(2) \sqrt{xy} = 4 - \sqrt{x}, 2 \cdot \sqrt{xy} = 3 + \sqrt{y} \Leftrightarrow uv = 4 - u, 2uv = 3 + v \Rightarrow u = \frac{4}{1+v}, v^2 -$$

$$-4v + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, y_1 = 9; x_2 = 4, y_2 = 1; \text{ XIII. 27. a) Se rezolvă sistemul: } a+c=2b, a+b+c=9, (a+1)(c+3)=(b+1)^2 \Rightarrow b=3, a+c=6, ac+3a+$$

$$+c=13 \Rightarrow a_1=7, b_1=3, c_1=-1 \text{ sau } a_2=1, b_2=3, c_2=5; \text{ b) Se notează } \frac{x}{a} = u,$$

$$\frac{y}{b} = v, \frac{z}{c} = w \text{ și sistemul devine: } u+v+w=6, uv+uw+vw=11, uvw=6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = 0 \Rightarrow t_1=1, t_2=2, t_3=3 \text{ soluția } (u, v, w) \text{ este } (1, 2, 3) \text{ sau o permutare a acestor numere (sistemul este simetric } u, v, w); \text{ pentru } a=1, b=3, c=5 \text{ se obțin soluțiile:}$$

x	1	1	2	2	3	3
y	6	9	3	9	3	6
z	15	10	15	5	10	5

XIII. 28. După transformări ecuația se scrie: $|\log_a x + 1| + |\log_a x - 1| = a^2 \cdot \sqrt{\log_a x}$; pentru $a > 1, \sqrt{\log_a x}$ există pentru $x \geq 1$, și ecuația devine: $\log_a x + 1 + \log_a x -$

$$-1 = a^2 \cdot \sqrt{\log_a x} \text{ cu } x > a \Rightarrow 2\log_a x = a^2 \sqrt{\log_a x} \Rightarrow \log_a x = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ (nu convine)}$$

$$4\log_a x = a^4 \Rightarrow x = a^{\frac{a^4}{4}} > a \text{ dacă } a^4 > 4 \Rightarrow a > \sqrt{2} \text{ sau } \log_a x + 1 - \log_a x + 1 = a^2 \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\log_a x} \text{ cu } x \in (1, a) \Rightarrow \log_a x = \frac{4}{a^4} \Rightarrow x = a^{\frac{4}{a^4}}; \text{ pentru } 0 < a < 1, \sqrt{\log_a x} \text{ există pentru}$$

$$0 < x \leq 1 \text{ și ecuația devine: } \log_a x + 1 + \log_a x - 1 = a^2 \cdot \sqrt{\log_a x} \text{ cu } 0 < x <$$

$< a \Rightarrow x = a^{\frac{a^4}{4}} > a$ (nu convine) sau $\log_a x + 1 - \log_a x + 1 = a^2 \cdot \sqrt{\log_a x}$
 cu $a < x \leq 1 \Rightarrow x = a^{\frac{4}{a^4}} < a$ (nu convine); deci ecuația admite rădăcinile $\frac{1}{4}x_1 = a^{\frac{4}{a^4}}$
 pentru $a \in (\sqrt{2}, +\infty)$ și $x_2 = a^{\frac{4}{a^4}}$ pentru $a \in (1, \sqrt{2})$; **XIII. 29.** $\lg \frac{x(4-x)}{10} = \lg \frac{\lg n}{10}$
 cu $x \in (0, 1) \cup (1, 4) \Rightarrow x^2 - 4x + \lg n = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - \lg n}$ cu condițiile $x \in$
 $\in (0, 1) \cup (1, 4)$, $n \leq 10^4$; pentru $n = 1$ ecuația nu admite rădăcini; pentru $n = 10^3$
 ecuația admite o rădăcină $x = 3$, pentru $n \in Z \cap \{(1, 10^3) \cup (10^3, 10^4)\}$, ecuația admite
 2 rădăcini, iar pentru $n = 10^4$ $x_1 = x_2 = 2$; **XIII. 30. a)** $a \cdot 3^{x+1} = 2^x \Rightarrow x = \frac{\lg 3a}{\lg 2 - \lg 3}$,
 $a > 0$; b) $x = \frac{\lg 3 + \lg a}{\lg 2 - \lg 3} = k \in Z \Rightarrow \lg 3a = k \lg \frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k$, $k \in Z$; **XIII. 31.**
 a) $x_1 = 1, x_2 = 2$; b) Ecuația este definită pentru $x \in (-1, \sqrt[3]{5})$. Deci $x^3 + x^2 + 2x -$
 $- 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{3}$; rădăcina ecuației este $x = 1$; **XIII. 32. a)** Ecuația
 se scrie: $\log \frac{4(ax+b)^2}{(abx)^3} = 4 \Rightarrow \frac{4(ax+b)^2}{(abx)^3} = \left(\frac{ax+b}{abx}\right)^4 \Rightarrow (ax-b)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{b}{a}$;
 b) $\log_1(x^2 - 3x + 1) < 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 1 > 1 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$; **XIII. 33. a)**

Rezultă tabelul:

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	$+\infty$			
$\left(x - \frac{1}{2}\right)(3 - x)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-
$ x - 1 $		> 1	1		0	1	2		> 1	
$\log_c x - 1 , c \in (0, 1)$	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$\log_c x - 1 , c \in (1, +\infty)$	+	+	0	-	-	+	0	+	+	+

Deci $F(x) > 0$ pentru $x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ dacă $c \in (0, 1)$ și pentru $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup$
 $\cup (2, 3)$ dacă $c \in (1, +\infty)$; b) Pentru $c \in (1, +\infty)$, $F(x) < 0$, $\forall x \in R \setminus \{0, 1, 2\}$ dacă
 $a = 0, b = 2$ sau $a = 2, b = 0$; pentru $c \in (0, 1)$ nu există a și b reali astfel ca $F(x) < 0$,
 $\forall x \in R \setminus \{0, 1, 2\}$. **XIII. 34. a)** Ecuația devine $x^2 - 3mx + m^2 = 0$ care are rădăcini
 reale ($\Delta = 5m^2$) pozitive: $P = m^2, S = 3m > 0, \forall m > 0$; b) Rezultă condițiile: $\Delta > 0$,
 $f(0) \cdot f(1) < 0 \Rightarrow m \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ c) Avem tabloul:

x	$-\infty$	-3	$-2\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	3	$+\infty$							
$x^2 - 8$	+	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	+	
$x^2 - 8 \geq 1$		>1	1		<1					1	>1			
$\log_3(x^2 - 8)$	+	+	0	-	-					-	0	+	+	+
$x^2 - 5x + 7$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$x^2 - 5x + 7 \geq 1$			>1			1	<1			1	>1			
$\log_{1/3}(x^2 - 5x + 7)$	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
E	-	-	-	0	+	+					-	-	-	-

XIII. 35. $a_1 = n, a_3 = \frac{n(n-1)}{2}, a_5 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ și $a_1 + a_5 = 2a_3 \Rightarrow n=7$; $T_6 =$
 $= C_7^5 \cdot 2^{\log(10-3^x)} \cdot 2^{(x-3)\log 3} = 21 \Rightarrow \log(10-3^x) + (x-2)\log 3 = 0 \Rightarrow 3^{x-2}(10-3^x) =$
 $= 1 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 0$; **XIII. 36. a)** $\frac{z-z_0}{z+z_0} = 2i \sin(\alpha - \alpha_0) \Rightarrow \arg \frac{z-z_0}{z+z_0} = \frac{\pi}{2}$; dacă se
 reprezintă geometric numerele complexe z_0 și z , atunci $z-z_0$ și $z+z_0$ sînt cele două
 diagonale ale paralelogramului construit pe vectorii $\vec{z}$ și $\vec{z_0}$ și deoarece $|z| = |z_0| \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ paralelogramul este romb cu diagonalele perpendiculare $\Rightarrow \arg(z-z_0) = \arg(z+z_0) +$
 $+\frac{\pi}{2} \Rightarrow \arg \frac{z-z_0}{z+z_0} = \frac{\pi}{2}$; b) $|z+z_0| = r \sqrt{(\cos \alpha + \cos \alpha_0)^2 + (\sin \alpha + \sin \alpha_0)^2} =$
 $= r \Rightarrow 2 + 2 \cos(\alpha - \alpha_0) = 1 \Rightarrow \alpha - \alpha_0 = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi + \alpha_0, k \in$
 $\in Z$; c) $z_1 = r \left[\cos \left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi + \alpha_0 \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi + \alpha_0 \right) \right] = r \left[\cos \left(\frac{2\pi}{3} + \right. \right.$
 $\left. \left. + \alpha_0 \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha_0 \right) \right], z_2 = r \cdot \left[\cos \left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi + \alpha_0 \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi + \right. \right.$
 $\left. \left. + \alpha_0 \right) \right] = r \cdot \left[\cos \left(-\frac{2\pi}{3} + \alpha_0 \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} + \alpha_0 \right) \right]; z_1^3 = r^3 \cdot [\cos(2\pi + 3\alpha_0) +$
 $+ i \sin(2\pi + 3\alpha_0)] = z_0^3$ și analog $z_2^3 = z_0^3$; $S_n = z_0^n + (z_1^3)^{\frac{n}{3}} + (z_2^3)^{\frac{n}{3}} = 3z_0^n$; **XIII. 37 a)**
 $\Delta = (15-16A) + 8 \cdot i(1-2B) = 0 \Rightarrow A = \frac{15}{16}, B = \frac{1}{2}$, b) $x_{1,2} = \frac{-4 \pm i\sqrt{(15-16A)+8i(1-2B)}}{8}$
 ecuația admite o rădăcină reală dacă $\sqrt{(15-16A)+8i(1-2B)} = a \pm i \Rightarrow 15-16A =$
 $= a^2 - 1, 8(1-2B) = \pm 2a \Rightarrow a = \pm 4(1-2B)$ și $4B^2 - 4B + A = 0$; c) $A = -4B^2 +$
 $+ 4B$, funcție de gradul al doilea în $B \Rightarrow B_{max} = \frac{1}{2}, A_{max} = 1$; ecuația $4B^2 - 4B +$
 $+ A = 0$ trebuie să admită rădăcinile $B_{1,2} \in [-1, 1]$. Există condițiile $\Delta = 4(1-A) \geq$
 $\geq 0, f(-1) = 8+A \geq 0, f(1) = A \geq 0 \Rightarrow 0 \leq A \leq 1$ și atunci $-1 \leq B \leq 1$; d) $A = -4B^2 +$

$$+4B = -4\sin^4\alpha + 4\sin^2\alpha = \sin^2 2\alpha; A+B=1 \Rightarrow \sin^2 2\alpha + \sin^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha (4\sin^2 \alpha - 1) = 0 \Rightarrow \cos \alpha = 0, \alpha = \pm \frac{\alpha}{2} + 2k\pi \text{ și } \sin \alpha = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \pm (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

XIII. 38. a) Se notează $\frac{z+i}{z-i} = t$; se obține $t^n = -1 \Rightarrow t_k = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \Rightarrow z_k = \frac{i(t_k + 1)}{t_k - 1}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$; b) Folosind $\cos \varphi + 1 = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$, $\cos \varphi - 1 = -2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$, $\sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}$ se obține:

$$z_k = -\cotg \frac{2k+1}{2n} \pi, k = 0, 1, 2, \dots, n-1; c) E = (1+z_k^2)(1+z_k) = \frac{\sqrt{2} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin^3 \alpha},$$

cu $\alpha = \frac{2k+1}{2n} \pi$; XIII. 39. 1) $\lambda > 0, \Delta = (\lambda+1)^2 - 4\lambda^2 \leq 0 \Rightarrow \lambda \in [1, +\infty)$; 2) Din condițiile $\Delta > 0, \lambda P(1) < 0$ rezultă $\lambda \in (0, 1)$; 3) $x_1 x_2 = 1$ și $\Delta < 0 \Rightarrow \lambda \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$; 4) $x_1 x_2 = 4\lambda^2, \Delta < 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$; XIII. 40. a) $\det(A \cdot B) =$

$$= \begin{vmatrix} 1+i & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1+i & -2 \end{vmatrix} = 0; b) X = \begin{bmatrix} 2(1-i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \\ 0 & \frac{1-i}{2} & 2i \end{bmatrix}, c) Y = X^{-1} \cdot (A \cdot$$

$$B) = \frac{1}{2(1+i)} \cdot \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & 4(1+i) & 4i \\ 0 & 2i & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1+i & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i}{2} & 0 & -\frac{1+i}{4} \\ 4 & 2(1+i) & -2(1+i) \\ 1+i & \frac{1+i}{2} & 0 \end{bmatrix};$$

XIII. 41 a) $A = \begin{bmatrix} a^2 + bc - \lambda a - \mu & b \cdot (a + d - \lambda) \\ c(a + d - \lambda) & bc + d^2 - \lambda d - \mu \end{bmatrix}$; b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda a + \mu = a^2 + bc, b\lambda = b(a+d), c\lambda = c(a+d), \lambda d + \mu = bc + d^2 \Rightarrow \lambda = a+d, \mu = bc - ad$; c) $b=c=0, a \neq d \Rightarrow \lambda = a+d, \mu = -ad$; $b=0, c \neq 0$ sau $b \neq 0, c=0 \Rightarrow \lambda = a+d, \mu = -ad$; $b \neq 0, c \neq 0 \Rightarrow \lambda = a+d, \mu = bc - ad$; XIII. 42. a) $aA + bB + cC = 0 \Rightarrow a + 0 \cdot b + mc = 0, 2a + b + 3c = 0, 2a - b + 2c = 0,$

$$0 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c = 0 \text{ (sistem omogen)} \Rightarrow \Delta = 5 - 4m = 0 \Rightarrow m = \frac{5}{4}; b) m = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{a}{-5} = \frac{b}{-2} = \frac{c}{4} = t \in \mathbb{R};$$

XIII. 43. a) $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \Rightarrow x = \frac{\lambda^2 - \lambda + 1}{\lambda(\lambda - 1)}, y = \frac{1}{\lambda(\lambda - 1)}, z = 0; \lambda = 0 \Rightarrow \text{sistem incompatibil}; \lambda = 1 \Rightarrow \text{sistem incompatibil}; b) \frac{x}{y} + 1 - \frac{1}{y} = 2(x - y) \Rightarrow 2 = 2, \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}; c) x = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3},$

$$\lambda_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \lambda_1^n + \lambda_2^n = (-1)^n \cdot 2; \text{XIII. 44.}$$

$$\Delta = 1 - m^6 \Rightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, x = \frac{m^2}{1-m^2}, y = -\frac{m^2}{1-m^2}, z = -\frac{m^2}{1-m^2}; m = \pm 1 \Rightarrow \text{sistem incompatibil}; b) m^6 - 1 = 0 \Rightarrow m_1 = 1, m_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, m_3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, m_4 = -1, m_5 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, m_6 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6
m_1	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6
m_2	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_1
m_3	m_3	m_4	m_5	m_6	m_1	m_2
m_4	m_4	m_5	m_6	m_1	m_2	m_3
m_5	m_5	m_6	m_1	m_2	m_3	m_4
m_6	m_6	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5

XIII. 45. a) $\Delta = 0 \Rightarrow 27x^3 + 45x^2 + 25x \sin^2 \alpha + 9(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0; \frac{x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3}{x_1 x_2 x_3} = \frac{25}{9} \Rightarrow \sin 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}; b) x_1 \in \left(-\infty, -\frac{10}{9}\right)$ și 2 răd. complexe; c) $x_1 = 0, x_{2,3} = \frac{-15 \pm 5i\sqrt{3}}{18}; A(0, i0), B\left(-\frac{5}{6}, i \cdot \frac{5\sqrt{3}}{18}\right); C\left(-\frac{5}{6}, -i \frac{5\sqrt{3}}{18}\right); a = |x_2 - x_1| = \frac{5\sqrt{3}}{9}; b = |x_3 - x_1| = \frac{5\sqrt{3}}{9}, c = |x_1 - x_2| = \frac{5\sqrt{3}}{9} \Rightarrow \triangle ABC - \text{echilateral};$ XIII. 46. a)

$$\Delta \cdot \Delta = \begin{vmatrix} 3 & x_1 + x_2 + x_3 & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 & x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \end{vmatrix}$$

$x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) = 2p, x_1^3 - p x_1 + q = 0 \Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -3q, x_1(x_1^2 - p x_1 + q) = 0 \Rightarrow x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 2p^2 \Rightarrow \Delta^2 = 4p^3 - 27q^2$; b) $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta^2 \geq 0 \Rightarrow 4p^3 - 27q^2 \geq 0$. Demonstrarea suficienței se face prin reducere la absurd. Presupunind că $x_1 = a + ib$ și deoarece $p, q \in \mathbb{R}, x_2 = a - ib, x_3 = -(x_1 + x_2) = -2a$. Se obține $\Delta^2 = (x_2 - x_1)^2 \cdot (x_3 - x_1)^2 \cdot (x_3 - x_2)^2 = (-2bi)^2 \cdot [(-3a - ib)(-3a + ib)]^2 = -4b^2(9a^2 + b^2) < 0$ contrazice ipoteza $\Delta^2 \geq 0 \Rightarrow$ condiția necesară și suficientă ca rădăcinile ecuației date să fie reale este $4p^3 - 27q^2 \geq 0$; c) $p = 6 + 2 - 2 = 6; x_1 \cdot x_2 = -5, x_1 + x_2 + x_3 = 0, (x_1 + x_2) x_3 + x_1 x_2 = -6, x_1 x_2 x_3 = -q \Rightarrow x_1 + x_2 = -x_3, x_3^3 = 1 \Rightarrow x_3 = \pm 1$; pentru $x_3 = 1, q = 5$ și $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$; pentru $x_3 = -1, q = -5$ și $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$;

XIII. 47. a) Egalăm determinantul sistemului cu zero: $4(a^2 + 1)(3ab - 1) - 4(2ab + 1) \cdot (ab + 1) + 4p = 0$; b) $f(a, 1, p) = 3a^2 - 3a^3 + p - 2 = 0$; $p \in (-\infty, 2) \Rightarrow 1$ răd. reală în $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ și 2 răd. complexe; $p = 2 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0, x_3 \in \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$; $p \in \left(2, \frac{22}{9}\right) \Rightarrow x_1 \in (-\infty, 0), x_2 \in \left(0, \frac{2}{3}\right), x_3 \in \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$; $p = \frac{22}{9} \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{2}{3}, x_3 \in (-\infty, 0)$; $p \in \left(\frac{22}{9}, +\infty\right) \Rightarrow 1$ răd. reală în $(-\infty, 0)$ și 2 răd. complexe;

XIII. 48. a) $b = aq, c = aq^2, d = aq^3$ și $x^3 + qx^2 + q^2x + q^3 = 0 \Rightarrow (x + q)(x^2 + q^2) = 0 \Rightarrow x_1 = -q, x_{2,3} = \pm iq$; $|x_1| = |x_2| = |x_3| = q$; b) $S_n = (-q)^n + (iq)^n + (-iq)^n \Rightarrow S_{2k} = q^{2k} \cdot [1 + 2(-1)^k]$ și $S_{2k+1} = -q^{2k+1}$ (numere reale); $S_n > 0 \Rightarrow k = 2m$ adică $n = 4m$; c) $x^3 + \frac{1}{x^3} + q\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + q^2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2q^3 = 16$; se notează $x + \frac{1}{x} = y$ și se obține ecuația $y^3 + qy^2 + (q^2 - 3)y - 2q + 2q^3 - 16 = 0$ care admite rădăcina $y = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{1 + i\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow 2q^3 + q^2 - q - 18 = 0 \Rightarrow q_1 = 2, q_{2,3} = \frac{-5 \pm 4i\sqrt{3}}{4}$; pentru $q = 2$ avem: $y^3 + 2y^2 + y - 4 = 0 \Rightarrow y_1 = 1, y_{2,3} = \frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{2}$ și $x_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}; x_{3,4} = \frac{-3 + i\sqrt{7} \pm (\sqrt{-7 + 4\sqrt{7}} - i\sqrt{7 + 4\sqrt{7}})}{4} x_{5,6} = \frac{-3 - i\sqrt{7} \pm (\sqrt{-7 + 4\sqrt{7}} + i\sqrt{7 + 4\sqrt{7}})}{4}$; **XIII. 49.** a) $m = 3, n = 0, p = -1$; b) $P(|x - 1|) = (x - 1)^2(2 \cdot |x - 1| + 3) - 1 > 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$; c) $y_i = \frac{x_1 x_2 x_3}{x_i^2} = -\frac{p}{2} \cdot \frac{1}{x_i^2}$; $4py^3 + 2(m^2 - 4n)y^2 + p(m^2 - 4n)y - p^3 = 0$. **XIII. 50.** 1) $x_3 = -1$ și $(1 + a)x^2 - (2 + a)x + a = 0$; 2) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - 1, a \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$; 3) Ecuația $T(x, a) \equiv (1 + a)x^2 - (2 + a)x + a = 0$ are o singură rădăcină în intervalul $(0, 1)$ dacă $\Delta > 0, T(0, a) \cdot T(1, a) < 0 \Rightarrow a \in (0, 1)$ **XIII. 51.** $a \in (-\infty, -54) \Rightarrow x_1 \in (3, +\infty), 2$ răd. complexe; $a \in (-54, 54) \Rightarrow 3$ răd. reale $x_1 \in (-\infty, -3), x_2 \in (-3, 3), x_3 \in (3, +\infty)$; $a \in (54, +\infty) \Rightarrow x_1 \in (-\infty, -3), 2$ răd. complexe $a = -54 \Rightarrow x_1 = x_2 = -3, x_3 \in (3, +\infty)$; $a = 54 \Rightarrow x_1 = x_2 = 3, x_3 \in (-\infty, -3)$; b) $x_1 = x_2 = 3$ pentru $a = 54$; $\varphi(3) = 0, \varphi'(3) = 0$ cu $\varphi(x) = x^4 - 4x^3 + mx^2 - nx + 18 \Rightarrow 3m - n = 3, 6m - n = 0 \Rightarrow m = -1, n = -6$ și $\varphi(x) = (x - 3)^2(x^2 + 2x + 2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 3, x_{3,4} = -1 \pm i$; **XIII. 52.** a) $Q(z) = (z - 1)(z - 2)$; se aplică schema lui Horner: $P(z): Q(z) = 2(m + 1)z^2 - 2(m + 1)(m - 2)z + m(m - 2)$; b) $P(z) = 0 \Rightarrow z_1 = 1, z_2 = 2$ și ecuația $2(m + 1)z^2 - 2(m + 1)(m - 2)z + m(m - 2) = 0$; $\Delta = (m + 1)^2(4 - m^2)$; $P = \frac{m(m - 2)}{2(m + 1)^2}$; $S = \frac{m - 2}{m + 1}$; $m \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \Rightarrow 2$ răd. complexe; $m = -2 \Rightarrow x_1 = x_2 > 0$; $m \in (-2, -1) \Rightarrow 2$ răd. reale pozitive; $m \in (-1, 0) \Rightarrow 2$ răd. reale negative; $m = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 < 0$; $m \in (0, 2) \Rightarrow 2$ răd. reale $x_1 > 0, x_2 < 0, x_1 < |x_2|$; $m = 2 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$; **XIII. 53.** a) $-1, 2, a \pm 1$; b) $-2a^2 + 2 \leq a^2 + 2a - 3 \leq 2a + 1 \Rightarrow a \in \left[-2, -\frac{5}{3}\right] \cup [1, 2]$; c) $f(a) = 2a^3 + a^2 - 2a - 6 \ln a - 1 = 0$;

$f'(a) = 0 \Rightarrow a_1 = 1, a_{2,3} = \frac{-2 \pm i\sqrt{5}}{3}$; $f(a) = 0$ admite numai rădăcina $a = 1$; **XIII. 54.** a) $x \rightarrow \frac{1}{x} \Rightarrow 105x^4 + mx^3 - 34x^2 + 4x + 1 = 0$; b) Rădăcinile comune verifică și diferența celor două ecuații $\Rightarrow 104(x^4 - 1) + x(m - 4) \cdot (x^2 - 1) = 0$; rădăcina comună poate fi $x = -1$ ($m = 68$) sau $x = 1$ ($m = -76$) sau $x_3 = \frac{4 - m + \sqrt{m^2 - 8m - 43248}}{208}$ sau $x_4 = \frac{4 - m - \sqrt{m^2 - 8m - 43248}}{208}$; c) Dacă $\div x_1, x_2, x_3, x_4$ atunci $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$ și formulele lui Viète ne dau: $x_1 + x_4 = x_2 + x_3 = -2, x_1x_4 + x_2x_3 = -38, x_1x_2x_3x_4 = 105 \Rightarrow \div -7, -3, 1, 5$ sau $\div 5, 1, -3, -7$ și $m = 74$; **XIII. 55.** a) $f(-1) = 0 \Rightarrow \sin 4a + \sin 3a + \sin 2a + \sin a = 0 \Rightarrow \cos a \sin \frac{5a}{2} \cos \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow a = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ sau $a = \frac{2k\pi}{5}$ sau $a = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$; b) $a = \frac{\pi}{2}, f(x) = 2x^5 + x^3 - x + 2 = 0, f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow$ ecuația $f(x) = 0$, admite rădăcina reală $x = -1$ și 4 rădăcini complexe; c) $x = -1$ este rădăcină dublă dacă $f(-1) = 0, f'(-1) = 10 - 4 \cdot \sin 4a - 3 \sin 3a - 2 \sin 2a - \sin a = 0 \Rightarrow \sin 4a = \sin 3a = \sin 2a = \sin a = 1$ (imposibil); astfel, valorile obținute pentru a la punctul a) trebuie să verifice $f'(-1) = 0$ (imposibil); **XIII. 56.** a) $P(x) : (x - 1 - i\sqrt{3})(x - 1 + i\sqrt{3}) [P(x)$ are coeficienți reali]; $P(x) = (x^2 - 2x + 4)(x^3 - 2x + m - 4)$; b) $P(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}$ și ecuația $f(x) = x^3 - 2x + m - 4 = 0$; $m \in \left(-\infty, 4 - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \Rightarrow x_1 \in \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right)$ și 4 răd. complexe, două câte două conjugate; $m = 4 - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow x_1 = x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}, x_3 \in \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right), x_{4,5} = 1 \pm i\sqrt{3}$; $m \in \left(4 - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}, 4 + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \Rightarrow x_1 \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right), x_2 \in \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right), x_3 \in \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right)$; $m = 4 + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow x_1 \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right), x_2 = x_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}, x_{4,5} = 1 \pm i\sqrt{3}$; $m \in \left(4 + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right) \Rightarrow x_1 \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ și 4 răd. complexe, două câte două conjugate; c) $P\left(\frac{1}{x}\right) = P(y) = 4(m - 4)y^5 - 2my^4 + my^3 + 2y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^5 \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^5 y_i = \frac{m}{2(m - 4)}$; $-\frac{1}{2} \leq \frac{m}{2(m - 4)} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow m \in \{(-\infty, 2] \cup (4, +\infty)\} \cap (-\infty, 4) = (-\infty, 2]$ d) $x_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right), x_2 = 1 - i\sqrt{3} = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]; x_3, x_4, x_5$ sînt rădăcinile ecuației $f(x) = x^3 - 2x + m - 4 = 0 \Rightarrow x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5 = -2$; $2^{n+1} \cos \frac{n\pi}{3} + (-2)^{n+1} = 0 \Rightarrow n = 6k, k \in \mathbb{N}$; **XIII. 57.** a) $2 \cos n\alpha = 1 \Rightarrow \alpha =$

$$= \frac{(6k \pm 1)\pi}{3n}, k \in \mathbb{Z}; x = \cos \alpha \in (-1, 1) \forall n \in \mathbb{N}; \text{ b) } \operatorname{tg}^{2n} \frac{\pi}{2} - \operatorname{tg}^n \frac{\pi}{2} + 1 = 0 \Rightarrow x^2 -$$

$-x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \operatorname{tg}^n \frac{\pi}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ (imposibil) $\Rightarrow$ ecuația nu admite rădăcini reale în afara intervalului $(-1, 1)$; c) se ridică la puterea a 4-a; $16x^4 - 16x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \right)$; de la punctul a) pentru $n = 4$: $x =$

$$= \cos \frac{(6k \pm 1)\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0, x_1 = \cos \left(\pm \frac{\pi}{12} \right) = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \right); k = 1, x_2 = \cos \frac{7\pi}{12} = -\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right), x_3 = \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right); k = 2, x_4 = \cos \frac{11\pi}{12} = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \right); \text{ XIII. 58. a) } x_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right); x_1 + x_2 = 1; x_1^2 + x_2^2 = 2 \cos \frac{2\pi}{3} = -1, x_1^3 + x_2^3 = 2 \cos \pi = -2, x_1^6 + x_2^6 = 2 \cos 2\pi = 2; E(n) = 2 \cos \frac{n\pi}{3}; E(0) = 2, E(1) = 1, E(2) = -1, E(3) = -2, E(4) = -1, E(5) = 1,$$

$E(6) = 2, E(7) = 2 \cos \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi \right) = E(1)$ etc. b) $E(n) = 2 \cos \frac{n\pi}{3} = 1 \Rightarrow n = 6k \pm 1, k \in \mathbb{Z}$; c) Se împarte ecuația la $x^3 + 1$; se obține cîntul $x^4 - 3x^2 - 4$ și restul $ax + b + 4 \equiv 0 \Rightarrow a = 0, b = -4; x_1 = -1, x_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, x_{4,5} = \pm$

$\pm 2, x_{6,7} = \pm i$; XIII. 59. a) $10 \cdot \hat{x} + 8\hat{x} = 10x + 8x = 18x = 5x; (\hat{5})^{-1} = \hat{8} \Rightarrow \hat{x} = \hat{8} \cdot \hat{12} = \hat{96} = \hat{5}$; b) Se adună ecuațiile: $19(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}) = \hat{8}$ sau $6(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}) = \hat{8} \Rightarrow \hat{x} + \hat{y} + \hat{z} = \hat{10}$; prima ecuație devine: $3\hat{x} + 8(10 - \hat{x}) = \hat{3} \Rightarrow 5\hat{x} = -1 = \hat{12} \Rightarrow \hat{x} = \hat{5}$ analog $\hat{y} = \hat{2}, \hat{z} = \hat{3}$; XIII. 60. c = 0, $\forall x \in (-1, +\infty)$; pentru $x = -1$ nu este definit elementul neutru $\Rightarrow$ legea * determină o structură de grup pe intervalul $(-1, +\infty)$; XIII. 61. a) $(C, *)$ și $(C, \circ)$ verifică axiomele grupului; elementele unitate sînt respectiv -1 și $-i$, iar elementele inverse sînt $-2-a$ și respectiv $-2i-a$; f este bijectivă: $\forall z \in C, \exists f(z) \in C$ (f -surjectivă) și $\forall z_1 \neq z_2, z_1, z_2 \in C, f(z_1) - f(z_2) = i(z_1 - z_2) \neq 0$ (f -injectivă); f păstrează operațiile: $f(a * b) = f(a) \circ f(b) \Rightarrow \Rightarrow i(a + b + 1) = (ia) \circ (ib) \Rightarrow i(a + b + 1) = ia + ib + i$; b) Rezultă tabelele:

.	1	i	-1	-i
1	1	i	-1	-i
i	i	-1	-i	1
-1	-1	-i	1	i
-i	-i	1	i	-1

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$$\varphi: \begin{matrix} i & i & -1 & -i \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}$$

Se verifică ușor că φ este bijectivă și $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ cu $a, b \in (G, \cdot)$ și $\varphi(a), \varphi(b) \in \mathbb{Z}_4$; de exemplu $\varphi[i \cdot (-1)] = \varphi(-1) = \hat{3}, \varphi(i) + \varphi(-1) = \hat{1} + \hat{2} = \hat{3}$; XIII. 62. a)

Se rezolvă în funcție de xyz , considerînd sistemul liniar în x, y, z : $x = \frac{m^2 - 3m - 4}{m^3 + 3m^2 - 2\alpha}$.

$$\cdot xyz = \frac{A}{\Delta} xyz, y = \frac{m^3 + 2m^2 - (7 + \alpha)m + 3\alpha - 12}{m^3 + 3m^2 - 2\alpha} \cdot xyz = \frac{B}{\Delta} xyz, z = \frac{-2(m^3 - 2m - \alpha)}{m^3 + 3m^2 - 2\alpha} \cdot xyz = \frac{C}{\Delta} xyz \Rightarrow zy = \frac{\Delta}{A}, xy = \frac{\Delta}{B}, xy = \frac{\Delta}{C} \Rightarrow xyz = \pm \sqrt{\frac{\Delta^3}{A \cdot B \cdot C}} \text{ și atunci } x = \pm \sqrt{\frac{A \cdot \Delta}{B \cdot C}}, y = \pm \sqrt{\frac{B \cdot \Delta}{A \cdot C}}, z = \pm \sqrt{\frac{C \cdot \Delta}{A \cdot B}} \text{ cu } \Delta \neq 0,$$

$A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$; b) Din $xyz + mx + z = 0$ rezultă că sistemul admite soluția cu numai o necunoscută nulă în cazul $x \neq 0, y = 0, z \neq 0 \Rightarrow 2(m^2 - 3)x + (m - 1)z = 0, (\alpha - m^2)x + 3z = 0, mx + z = 0 \Rightarrow z = -mx, m^2 + m - 6 = 0, \alpha - m^2 - 3m = 0 \Rightarrow m^2 = -3, \alpha_1 = 0, x_1 = t, y_1 = 0, z_1 = 3t, t \in \mathbb{R}; m_2 = 2, \alpha_2 = 10, x_2 = t, y_2 = 0, z_2 = -2t, t \in \mathbb{R}$; c) $\Delta = m^3 + 3m^2 - 2\alpha = 0 \Rightarrow$ pentru $\alpha \in (-\infty, 0), m_1 \in (-\infty, -2)$; pentru $\alpha = 0, m_1 = m_2 = -2, m_3 \in (-\infty, -2)$; pentru $\alpha \in (0, 2), m_1 \in (-\infty, -2), m_2 \in (-2, 0), m_3 \in (0, +\infty)$; pentru $\alpha = 2, m_{1,2} = -2, m_3 \in (0, +\infty)$ pentru $\alpha \in (2, +\infty), m_1 \in (0, +\infty)$; d) Se verifică axiomele grupului: 1) existența elementului neutru: $x \top e = x \Rightarrow a = 0, 2e + 2m^2 - 6 = 1, 2e + m - 1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0, m_1 = 2, e_1 = -\frac{1}{2}$ sau $a_2 = 0, m_2 = -\frac{3}{2}, e_2 = \frac{5}{4}$; $e \top x = x \Rightarrow a = 0; 2e + 2 = 1,$

$2(m^2 - 3)e + m - 1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0, e_1 = -\frac{1}{2}, m_1 = 2$ sau $a_2 = 0, e_2 = -\frac{1}{2}, m_2 = -1$. Rezultă deci $e = -\frac{1}{2}, a = 0, m = 2, x \top y = 2xy + 2x + 2y + 1$

2) Asociativitatea: $(x \top y) \top z = x \top (y \top z)$; 3) Element simetric: $x \top x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \tilde{x} = -\frac{4x + 3}{4x + 4} x \neq -1 \notin E$; 4) Comutativitatea: $x \top y = y \top x$; XIII. 62. a) Se verifică axiomele grupului; b.1) Din $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = 0$, rezultă sistemul $\lambda_1 a_1 + \lambda_1 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = 0, \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 = 0$ cu necunoscutele $\lambda_1, \lambda_2,$

$$\lambda_3 \text{ și } \Delta \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0; \text{ b.2) Fie } A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a + b \\ b & c \end{bmatrix} \in M, \text{ relația dată este echi-}$$

valentă cu sistemul: $ua_1 + va_2 + wa_3 = a, ub_1 + vb_2 + wb_3 = b, uc_1 + vc_2 + wc_3 = c$ pentru care $\Delta \neq 0, \Delta \in \mathbb{Q} \Rightarrow u, v, w$ raționali, unic determinați. XIII. 64. a) Pentru mulțimea E vezi problema XII. 8. rezolvă; pentru M se verifică axiomele inelului: 1) $A(u_1, v_1) + A(u_2, v_2) = A(u_1 + u_2, v_1 + v_2) \in M$; 2) asociativitatea operației (+): $[A(u_1, v_1) + A(u_2, v_2)] + A(u_3, v_3) = A(u_1, v_1) + [A(u_2, v_2) + A(u_3, v_3)] = A(u_1 + u_2 + u_3, v_1 + v_2 + v_3)$; 3) elementul neutru față de operația (+) este $A(0, 0)$; 4) elementul simetric față de operația (+) este $A(-u, -v)$; 5) $A(u_1, v_1) \cdot A(u_2, v_2) = A(u_1 u_2 + 2v_1 v_2, u_1 v_2 + u_2 v_1) \in M$; 6) asociativitatea operației ($\cdot$): $[A(u, v_1) \cdot A(u, v_2)] \cdot A(u_3, v_3) = A(u, v_1) \cdot [A(u_2, v_2) \cdot A(u_3, v_3)]$; 7) elementul neutru față de operația ($\cdot$) este $A(1, 0)$; 8) distributivitatea operației ($\cdot$) față de operația (+): $A(u_1, v_1) \cdot A(u_1, v_1) \cdot [A(u_2, v_2) + A(u_3, v_3)] = A(u_1, v_1) \cdot A(u_2, v_2) + A(u_1, v_1) \cdot A(u_3, v_3)$; b) $\alpha A(u', v') + \beta A(u'', v'') = A(0, 0) \Rightarrow \alpha u' + \beta u'' = 0, \alpha v' + \beta v'' = 0$, pentru ca sistemul să admită soluții α, β diferite de zero este

necesar și suficient ca $\begin{vmatrix} u' & u'' \\ v' & v'' \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow u'v'' - u''v' = 0$; 1) φ - bijectie $\Rightarrow \forall (a + b\sqrt{2}) \in E$, există $\varphi(a + b\sqrt{2}) \in M$ (φ - este surjecție); pentru $a_1 + b_1\sqrt{2} \neq a_2 + b_2\sqrt{2}$, $\varphi(a_1 + b_1\sqrt{2}) \neq \varphi(a_2 + b_2\sqrt{2})$ (φ - este injecție); 2) φ păstrează operațiile: $\varphi[(a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2})] = \varphi(a_1 + b_1\sqrt{2}) + \varphi(a_2 + b_2\sqrt{2})$ și $\varphi[(a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{2})] = \varphi(a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot \varphi(a_2 + b_2\sqrt{2}) \Rightarrow M$ este inel comutativ și fără divizori ai lui zero, ceea ce se observă și direct din $A(u_1, v_1) \cdot A(u_2, v_2) = A(u_2, v_2) \cdot A(u_1, v_1) = A(u_1u_2 + 2v_1v_2, u_1v_2 + u_2v_1)$ și $A(0, 0)$ nu admite simetric în raport cu operația $(\cdot)$; XIII. 65. b) $e = i$, $\forall x_1, x_2 \in R \setminus \{0\}$; elementul simetric elementului $(x_1 + ix_2)$ este $\left(-\frac{x_2}{x_2(x_1 + x_2)} + i\frac{1}{x_2}\right)$, $\forall x_1, x_2 \in R \setminus (0)$. XIII. 66. a) E este subspațiu vectorial din M dacă: 1) $\forall X, Y \in E \Rightarrow X - Y \in E$ și 2) $\forall X \in E, \forall a \in R \Rightarrow aX \in E$ ceea ce se verifică ușor; dimensiunea lui E este 2; b) $AX = AY \Rightarrow X = Y$ și $XA = YA \Rightarrow X = Y$, $\forall X, Y \in M$; c) $a + d = -1$, $ad - bc = -2 \Rightarrow a^2 + bc = -a + d$, $bc + d^2 = -d + 2$; $A^2 \cdot A^{-1} = -A \cdot A^{-1} + 2IA^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot A + \frac{1}{2}I$; d) $(\alpha_1A + \beta_1I) \cdot (\alpha_2A + \beta_2I) = \alpha_1\alpha_2A^3 + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)A + \beta_1\beta_2I = (-\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) \cdot A + 2(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) \cdot I \in E$, E - este corp; e) $X^2 = X \Rightarrow (-\alpha^2 + 2\alpha\beta)A + (2\alpha^2 + \beta^2)I = \alpha A + \beta I \Rightarrow a(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \alpha) = 2\alpha^2 + \beta^2 - \beta$, $b(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \alpha) = 0$, $c(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \alpha) = 0$, $d(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \alpha) = 2\alpha^2 + \beta^2 - \beta$, $a + d = -1$, $ad - bc = -2 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha\beta + \alpha = 0$, $2\alpha^2 + \beta^2 - \beta = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \beta_1 = 0; \alpha_2 = 0, \beta_2 = 1; \alpha_3 = -\frac{1}{3}, \beta_3 = \frac{1}{3}; \alpha_4 = \frac{1}{3}, \beta_4 = \frac{2}{3}$.

BIBLIOGRAFIE

1. Arghiriade, E., Dragomir, A. și Dragomir, P. *Algebra*, București, Editura didactică și pedagogică, 1964.
2. Berrebi, E. *Mathématique: Exercices corrigés*, tome I. Paris, Dunod, 1965.
3. Bréard, C. *Mathématique: Structures algébriques*, tome I-II, Paris, Edition de L'ecole, 1967.
4. Ciorănescu, N. și Roșculeț, M. *Culegere de probleme de algebră și analiză matematică*, București, Editura tehnică, 1959.
5. Creangă I. și Haimovici, C. *Algebră liniară*, București, Editura didactică și pedagogică, 1962.
6. Donciu, N., Flondor, D. și Simionescu, G. *Culegere de probleme de algebră și analiză matematică*, vol. I, București, Editura didactică și pedagogică, 1964.
7. Drăghici, D. *Algebră*. București, Editura didactică și pedagogică, 1972.
8. Dubreil, P. și Dubreil, M.L. *Leçon d'algèbre moderne*, Paris, Dunod, 1964.
9. Fadeev, D.K. și Sominski, I.S. *Sbornik zadaci po vissei algebre*. Moskva, 1961.
10. Patrick Fitz, J. *Exercices d'arithmétique*, ed. III. Paris, Hermann, et fils, 1914.
11. Félix, L. *Exposé moderne des mathématiques élémentaires*, Dunod, Paris, 1959.
12. Ghelfond, A.O. *Rezolvarea ecuațiilor în numere întregi*, București, Editura tehnică, 1954.
13. Godement, R. *Cours d'algèbre*, Paris, Hermann, 1963.
14. Hocquenghem A. și Jaffard P. *Mathématiques*, tome I, Paris, Masson, 1966.
15. Ioachimescu, A.G. *Culegere de probleme de algebră pentru licee* ed. V, București Editura didactică și pedagogică, 1968.
16. Mihăilănu, N. *Complimente de algebră elementară*. București, Editura didactică și pedagogică, 1968.
17. Kuratowski, K. *Introducere în teoria mulțimilor și în topologie*, București, Editura tehnică, 1969.
18. Moisil, Gr.C. *Elemente de logică matematică și de teoria mulțimilor*, București, Editura științifică, 1968.
19. Monjallon, A. *An Introduction to Modern Mathematics*. Oliver and Boyd, Edinburgh and London 1967.
20. Nicolescu, M., Dinculeanu, N., și Marcus, S. *Analiză matematică* vol. I, ed. IV, București, Editura didactică și pedagogică, 1971.
21. Niewengłowski, B. *Cours d'algèbre*, ed. II, tome I, Paris, Librairie Armand Colin, 1924.

22. Pic, G. h. *Algebră superioară*, București, Editura didactică și pedagogică, 1966.
23. Rimer, D. *Noțiuni de teoria mulțimilor*, ed. II, București, Editura didactică și pedagogică, 1968.
24. Roșculeț, M. *Culegere de probleme de analiză matematică*, București, Editura didactică și pedagogică, 1968.
25. Stamate, I. și Stoian, I. *Culegere de probleme de algebră*, ed. II, București, Editura didactică și pedagogică, 1972.
26. Stănescu, I. și Rădoi, I. — *Complemente de matematică pentru cercurile de elevi din licee*. București, Editura didactică și pedagogică 1970.
27. * * * — *Gazeta matematică*, seria A.
28. * * — *Gazeta matematică*, seria B.

CUPRINS

Capitolul I. Mulțimi. Relații. Aplicații

Probleme rezolvate	5
Probleme propuse	17

Capitolul II. Numere reale

Probleme rezolvate	23
Probleme propuse	36

Capitolul III. Ecuații de gradul întâi, al doilea și reductibile la acestea. Inecuații

Probleme rezolvate	41
Probleme propuse	77

Capitolul IV. Sisteme de ecuații de gradul întâi, al doilea și reductibile la acestea

Probleme rezolvate	89
Probleme propuse	112

Capitolul V. Ecuații și sisteme de ecuații exponențiale și logaritmice

Probleme rezolvate	119
Probleme propuse	131

Capitolul VI. Numere complexe

Probleme rezolvate	134
Probleme propuse	149

Capitolul VII. Analiza combinatorie

Probleme rezolvate	152
Probleme propuse	161

Capitolul VIII. Progresii. Sume

Probleme rezolvate	164
Probleme propuse	179

Capitolul IX. Matrice. Determinanți. Sisteme de ecuații liniare

Probleme rezolvate	183
Probleme propuse	208

Capitolul X. Expresii algebrice. Polinoame. Frații algebrice

Probleme rezolvate	217
Probleme propuse	231

Capitolul XI. Ecuații de grad superior lui 2

Probleme rezolvate	238
Probleme propuse	266

Capitolul XII. Structuri algebrice

Probleme rezolvate	270
Probleme propuse	287

Capitolul XIII. Probleme recapitulative

Probleme propuse	297
Indicații și răspunsuri	317
Bibliografie	371



Cnntrnol științific: acad. NICOLAE TEODORESCU
prof. MIHAIL ROȘCULEȚ
Redactor: LILI TICOȘ
Tehnoredactor: ELENA GERU
Coperta: ALEXANDRU BANU

Bun de tipar: 16,04. 1977. Coli de tipar: 23,50. Tiraj: 149.000+
+ 75 legate. C.Z. 512 (076.1)



13 DECEMBRIE 1918

Tiparul executat sub comanda
nr. 978 la
Intreprinderea Poligrafică
„13 Decembrie 1918”
str. Grigore Alexandrescu nr. 89—97
București,
Republica Socialistă România